Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

06.11.2016 Theoretische Physik IV Übung 2 Marvin Zanke

Was sollen die H.O. physikalisch darstellen?

H2)

1. Es gilt $\varrho(E) = Tr[\delta(E-\hat{H})]$

Mit dem gegebenen Hamiltonoperator / en und Eigenwerten der Energie folgt sofort:

Kann man $\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\dots\sum_{n_N}^{\infty}$ so schreiben mit dem Produktzeichen? ja!

$$Tr[\delta(E-\hat{H})] = \prod_{i=1}^{N}\sum_{n_i=0}^{\infty} \langle \Phi_{n_1\dots n_N}|\delta(E-\hat{H})|\Phi_{n_1\dots n_N}\rangle$$

Für die Spur kann man beliebige Basis nehmen oder muss es $\Phi_{n_1\dots n_N}$ sein? beliebige. ✓ Ja, aber geschickt gewählt genau!

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\dots\sum_{n_N=0}^{\infty}\delta(E-E_{n_1\dots n_N}) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\dots\sum_{n_N=0}^{\infty}\delta\Big(E-\hbar\omega\sum_{j=1}^{N}(n_j+\tfrac{1}{2})\Big)$$

Dann gilt mit $\int_{-\infty}^{\infty}dk\, e^{ik(x-x_0)} = 2\pi\,\delta(x-x_0)$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\dots\sum_{n_N=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\, e^{ik(E-\sum_{j=1}^{N}\hbar\omega(n_j+\frac{1}{2}))}$$

Kann man Produkt und Summe hier so einfach vertauschen? ja! schreib im Zweifel das Produkt um, dann siehst du es direkt

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\, e^{ikE}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\dots\sum_{n_N=0}^{\infty}e^{-ik\sum_{j=1}^{N}\hbar\omega(n_j+\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\, e^{ikE}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\dots\sum_{n_3=0}^{\infty}e^{-ik\hbar\omega\frac{N}{2}}\cdot\prod_{j=1}^{N}e^{-ik\hbar\omega n_j}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\, e^{ik\{E-\hbar\omega\frac{N}{2}\}}\underbrace{\prod_{j=1}^{N}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\dots\sum_{n_N=0}^{\infty}e^{-ik\hbar\omega n_j}}$$

Tutorium:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}e^{-ik\hbar\omega n_1}\cdot\sum_{n_2=0}^{\infty}e^{-ik\hbar\omega n_2}\dots = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-ik\hbar\omega n}\Big)^N$$

wieso gilt $\int dk\, e^{ik(x-x_0)} = 2\pi\delta(x-x_0)$?

für beliebiges j gilt:

$$\sum_{n_j=0}^{\infty}e^{-ik\hbar\omega n_j} = \sum_{n_j=0}^{\infty}\big(e^{-ik\hbar\omega}\big)^{n_j} = \frac{1}{1-e^{-ik\hbar\omega}}$$

nicht ganz!

$x\in\mathbb{C}$, und $|e^{-x}|=1$

für $x=ik\hbar\omega$ => konvergiert nur mit einem Trick!

da $e^{-x}<1$ für $x>0$, $x=ik\hbar\omega$ und dies damit der geometrischen Reihe entspricht

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\, e^{ik\{E-\hbar\omega\frac{N}{2}\}}\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{1-e^{-ik\hbar\omega}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\, e^{ik\{E-\hbar\omega\frac{N}{2}\}}\Big(\frac{1}{1-e^{-ik\hbar\omega}}\Big)^N \quad \text{da unabhängig von } j$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\, e^{ikE}\Big(\frac{e^{-ik\hbar\omega/2}}{1-e^{-ik\hbar\omega}}\Big)^N$$

$$\big|e^{-i(k\hbar\omega-i\epsilon)}\big| = e^{-ik\hbar\omega}\cdot e^{-\epsilon}$$

2. $\Omega(E) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty} dk\, e^{ikE}\left(\frac{e^{-ik\hbar\omega/2}}{1-e^{-ik\hbar\omega}}\right)^N$

$$\frac{e^{ik\hbar\omega/2}}{e^{ik\hbar\omega/2}} = 1 \rightarrow = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikE}\underbrace{\left(\frac{1}{e^{ik\hbar\omega/2}-e^{-ik\hbar\omega/2}}\right)}_{\frac{1}{2i\sin(k\frac{\hbar\omega}{2})}}^N \text{, denn } \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{N\{ik\frac{E}{N}\}}\left\{\frac{1}{2i\sin(\frac{\hbar\omega}{2}k)}\right\}^N$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{N\{ik\epsilon - \log[2i\sin(\frac{\hbar\omega}{2}k)]\}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{Nf(k)}$$

$$\text{mit } f(k) = ik\epsilon - \log\left[2i\sin\left(\frac{\hbar\omega}{2}k\right)\right]$$

Warum entwickeln wir gerade um ein Maximum von f Deshalb sind nur für große N?

beim Maximum hat das Integral das meiste „Gewicht"

3. $$0 \overset{!}{=} \frac{df}{dk} = i\epsilon - \frac{1}{2i\sin(\frac{\hbar\omega}{2}k)}\cdot 2i\cos\left(\frac{\hbar\omega}{2}k\right)\cdot\frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\Longleftrightarrow i\epsilon = \frac{\cos(\frac{\hbar\omega}{2}k)}{\sin(\frac{\hbar\omega}{2}k)}\cdot\frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2i\epsilon}{\hbar\omega} = \frac{e^{i\frac{\hbar\omega}{2}k}+e^{-i\frac{\hbar\omega}{2}k}}{2}\cdot\frac{2i}{e^{i\frac{\hbar\omega}{2}k}-e^{-i\frac{\hbar\omega}{2}k}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2\epsilon}{\hbar\omega} = \frac{e^{i\frac{\hbar\omega}{2}k}+e^{-i\frac{\hbar\omega}{2}k}}{e^{i\frac{\hbar\omega}{2}k}-e^{-i\frac{\hbar\omega}{2}k}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2\epsilon}{\hbar\omega}\left\{e^{i\frac{\hbar\omega}{2}k}-e^{-i\frac{\hbar\omega}{2}k}\right\} = e^{i\frac{\hbar\omega}{2}k}+e^{-i\frac{\hbar\omega}{2}k}$$

$$\Longleftrightarrow e^{i\frac{\hbar\omega}{2}k}\left\{1-\frac{2\epsilon}{\hbar\omega}\right\} = -e^{-i\frac{\hbar\omega}{2}k}\left\{1+\frac{2\epsilon}{\hbar\omega}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow -e^{i\hbar\omega k} = \frac{1+\frac{2\epsilon}{\hbar\omega}}{1-\frac{2\epsilon}{\hbar\omega}}$$

$$\Longleftrightarrow i\hbar\omega k = \log\left\{\frac{\frac{\hbar\omega}{2}+\epsilon}{\frac{\hbar\omega}{2}-\epsilon}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow k = \frac{1}{i\hbar\omega}\log\left\{\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}\right\} = \bar{k}$$

$$\boxed{\underline{\text{Wichtig:}}\ \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

$$4.\quad f''(k) = -\frac{\hbar\omega}{2}\,\frac{\{-\sin^2(\frac{\hbar\omega}{2}k) - \cos^2(\frac{\hbar\omega}{2}k)\}\frac{\hbar\omega}{2}}{\sin^2(\frac{\hbar\omega}{2}k)}$$

$$= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\,\frac{1}{\sin^2(\frac{\hbar\omega}{2}k)} = \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\,\frac{(2i)^2}{(e^{i\frac{\hbar\omega}{2}k} - e^{-i\frac{\hbar\omega}{2}k})^2}$$

$$= -\hbar^2\omega^2\,\frac{1}{(e^{i\frac{\hbar\omega}{2}k} - e^{-i\frac{\hbar\omega}{2}k})^2}$$

$$\leadsto f''(\bar{k}) = -\hbar^2\omega^2\,\frac{1}{\{e^{\frac{1}{2}\log(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}})} - e^{-\frac{1}{2}\log(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}})}\}^2}$$

$$= -\hbar^2\omega^2\,\frac{1}{\left\{\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}\right)^{1/2} - \left(\frac{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}\right)^{1/2}\right\}^2}$$

$$= -\hbar^2\omega^2\,\frac{1}{\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}} + \frac{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}} - 2\sqrt{1}}$$

$$= -\hbar^2\omega^2\,\frac{1}{\frac{(\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2})^2 + (\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2})^2}{\epsilon^2 - \frac{\hbar\omega^2}{4}} - 2}$$

wieso $\frac{E}{N} \geq \frac{\hbar\omega}{2}$? ✓

Energie pro Teilchen mehr als Grundzustand

genau

$$= -\hbar^2\omega^2\,\frac{1}{\frac{(2\epsilon^2 + \frac{\hbar^2\omega^2}{2}) - 2(\epsilon^2 - \frac{\hbar^2\omega^2}{4})}{\epsilon^2 - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}}}$$

$$= -\hbar^2\omega^2\,\frac{\epsilon^2 - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}}{\hbar^2\omega^2} = \frac{\hbar^2\omega^2}{4} - \epsilon^2 \leq 0$$

$$\epsilon = \frac{E}{N} \geq \frac{\hbar\omega}{2}$$

5. Mit $f(k) = f(\bar{k}) + \frac{1}{2}f''(\bar{k})(k-\bar{k})^2 + \mathcal{O}((k-\bar{k})^3)$ folgt (N groß!)

$$\Omega(E) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{N\{f(\bar{k}) + \frac{1}{2}f''(\bar{k})(k-\bar{k})^2 + \mathcal{O}((k-\bar{k})^3)\}}$$

$$\approx \frac{1}{2\pi}e^{Nf(\bar{k})}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{\frac{N}{2}f''(\bar{k})(k-\bar{k})^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{Nf(\bar{k})}\sqrt{\frac{2\pi}{(\epsilon^2 - \frac{\hbar^2\omega^2}{4})N}}$$

$k' = (k+b)\sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{dk'}{dk} = \sqrt{a}$

wo wir benutzt haben: $\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-a(k+b)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-k'^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi N(\epsilon^2 - \frac{\hbar\omega^2}{4})}}\; e^{N\left\{\frac{\epsilon}{\hbar\omega}\log\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}\right) - \log\left[2i\sin\left(\frac{\hbar\omega}{2}\frac{1}{i\hbar\omega}\log\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}\right)\right)\right]\right\}}$$

Damit folgt:

$$\log(\Omega(E)) = -\frac{1}{2}\log\left\{2\pi N\left(\epsilon^2 - \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\right)\right\}$$
$$+ N\left\{\frac{\epsilon}{\hbar\omega}\log\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}\right) - \log\left[2i\sin\left(\frac{1}{2i}\log\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}\right)\right)\right]\right\}$$

Hier kommt noch $\epsilon^2 = \frac{E^2}{N^2}$ vor, wie ist das dann $\mathcal{O}(\log N)$?

Ja, aber $\log\left(\frac{\epsilon}{N}\right) = -\log(N)$

E/N ist ungefähr unabhängig von N!

$$= N\left\{\frac{\epsilon}{\hbar\omega}\log\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}\right) - \log\left\{e^{\frac{1}{2}\log\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}\right)} - e^{-\frac{1}{2}\log\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}\right)}\right\}\right\} + \mathcal{O}(\log N)$$

$$= N\left\{\frac{\epsilon}{\hbar\omega}\log\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}\right) - \log\left\{\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}\right)^{1/2} - \left(\frac{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}\right)^{1/2}\right\}\right\} + \mathcal{O}(\log N)$$

$$= N\left\{\frac{\epsilon}{\hbar\omega}\log\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}\right) - \log\left\{\frac{\left(\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}\right) - \left(\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}\right)}{\sqrt{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}\sqrt{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}}\right\}\right\} + \mathcal{O}(\log N)$$

$$= N\left\{\frac{\epsilon}{\hbar\omega}\log\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}\right) - \log(\hbar\omega) + \frac{1}{2}\log\left(\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}\right)\right\} + \mathcal{O}(\log N)$$

$$= N\left\{\frac{\epsilon}{\hbar\omega}\log\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\hbar\omega}\right) + \frac{\epsilon}{\hbar\omega}\log\left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}\right) - \log(\hbar\omega) + \frac{1}{2}\log\left(\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}\right)\right\} + \mathcal{O}(\log N)$$

$$= N\left\{\frac{\epsilon}{\hbar\omega}\log\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\hbar\omega}\right) - \frac{\epsilon}{\hbar\omega}\log\left(\frac{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}{\hbar\omega}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}{\hbar\omega}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\hbar\omega}\right)\right\} + \mathcal{O}(\log N)$$

$$= N\left\{\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\hbar\omega}\right)\log\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\hbar\omega}\right) - \left(\frac{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}{\hbar\omega}\right)\log\left(\frac{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}{\hbar\omega}\right)\right\} + \mathcal{O}(\log N)$$

was bedeutet dass $\log(\Omega(E)) \sim N$ und damit

$\Omega(E) \sim e^N \;\hat{=}$ Anz. Zustände wächst exponentiell!

Was hat $\Omega(E)$ für eine Bedeutung wenn $\Omega(E)\cdot\Delta \;\hat{=}$ Anz. Energiezustände?

gute Frage!

$\Omega(E)$ ist leicht zu berechnen, und über $\Delta\cdot\Omega(E) = \int_{E-\Delta/2}^{E+\Delta/2} dE'\,\Omega(E')$ kommt man schnell zur Anzahl der Zustände