Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

12.11.2016 Theoretische Physik IV Blatt 3 Marvin Zanke, Max Graf

H3)

$$w(\epsilon_0) = \sum_{n \,|\, E \le E_n^R + \epsilon_0 \le E + \Delta} \frac{1}{\Delta \Omega(E,V,N)}$$

Woher kommt diese Summe? Normalerweise $w(\epsilon_0) = \langle \delta(\epsilon_0 - H_0) \rangle$. Diese Summe ist $Tr[\delta \rho]$?

nein, $Tr[\delta(E-\hat{H})] = \Omega(E)$ (Zustandsdichte).

$w(\epsilon_0) \hat{=}$ W-keit, dass irgendein Teilchen Energie ϵ_0 hat.

1.
$$w(\epsilon_0) = \sum_n \frac{1}{\Delta \Omega(E,V,N)} \left\{ \theta((E+\Delta) - (E_n^R + \epsilon_0)) - \theta(E - (E_n^R + \epsilon_0)) \right\}$$

$$= \sum_n \frac{1}{\Delta \Omega(E,V,N)} \left\{ \theta((E - E_n^R - \epsilon_0) + \Delta) - \theta(E - E_n^R - \epsilon_0) \right\}$$

Wieso $\Delta \to 0$? Genau genommen Δ sehr klein

Betrachten wir diesen Ausdruck im limes $\Delta \to 0$ so folgt:

$$\lim_{\Delta \to 0} w(\epsilon_0) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_n \frac{1}{\Omega(E,V,N)} \frac{\theta((E - E_n^R - \epsilon_0) + \Delta) - \theta(E - E_n^R - \epsilon_0)}{\Delta}$$

$$= \sum_n \frac{1}{\Omega(E,V,N)} \delta(E - E_n^R - \epsilon_0) =$$

Mikrokanonische Gesamtheit idealen Gas? ?

$$\cancel{\Leftrightarrow} \quad w(\epsilon_0) = \frac{1}{\Omega(E,V,N)} \sum_n \delta((E - \epsilon_0) - E_n^R)$$

streng genommen: „$\Rightarrow$"

keine Dichte sondern Absolutwert? δ-Fkt. peakt ins unendliche

$$= \frac{1}{\Omega(E,V,N)} \sum_n \delta((E-\epsilon_0) - E_n^R) \langle \psi_n | \psi_n \rangle$$

$$= \frac{1}{\Omega(E,V,N)} \sum_n \langle \psi_n | \delta((E-\epsilon_0) - H^R) | \psi_n \rangle$$

$$= \frac{Tr[\delta((E-\epsilon_0) - H^R)]}{\Omega(E,V,N)} = \frac{\Omega(E-\epsilon_0, V, N-1)}{\Omega(E,V,N)}$$ ✓.

2. $f(\epsilon_0) = \log\{\Omega(E - \epsilon_0, V, N-1)\}$ für $N \gg 1$ und $\epsilon_0 \ll E \Leftrightarrow \frac{\epsilon_0}{E} \ll 1$

Man kann auch $f(E-\epsilon_0)$ taylorn um E, d.h. für kleine ϵ_0

$$f(\epsilon_0) = \log\left\{ 2\pi m \frac{V^{N-1}}{h^{N-1}} \frac{(2\pi m (E-\epsilon_0))^{\frac{3N}{2} - \frac{5}{2}}}{\Gamma(N) \Gamma(\frac{3(N-1)}{2})} \right\}$$

$$= \log\left\{ 2\pi m \frac{V^{N-1}}{h^{N-1}} \frac{(2\pi m)^{\frac{3N}{2} - \frac{5}{2}}}{\Gamma(N)\Gamma(\frac{3N}{2} - \frac{3}{2})} \right\} + \log\left\{ (E-\epsilon_0)^{\frac{3N}{2} - \frac{3}{2}} \right\}$$

$$= \log\left\{ (2\pi m)^{\frac{3N}{2} - \frac{3}{2}} \frac{V^{N-1}}{h^{N-1}} \frac{1}{\Gamma(N)\Gamma(\frac{3N}{2} - \frac{3}{2})} \right\} + \left(\frac{3N}{2} - \frac{5}{2}\right) \log(E - \epsilon_0)$$

$$= \log\left\{ (2\pi m)^{\frac{3N}{2} - \frac{3}{2}} \frac{V^{N-1}}{h^{N-1}} \frac{1}{\Gamma(N)\Gamma(\frac{3N}{2} - \frac{3}{2})} \right\} + \left(\frac{3N}{2} - \frac{5}{2}\right) \left\{ \log(E) + \log\left(1 - \frac{\epsilon_0}{E}\right) \right\}$$

$$\approx \log\left\{ (2\pi m)^{\frac{3N}{2} - \frac{3}{2}} \frac{V^{N-1}}{h^{N-1}} \frac{1}{\Gamma(N)\Gamma(\frac{3N}{2} - \frac{3}{2})} \right\} + \left(\frac{3N}{2} - \frac{5}{2}\right) \left\{ \log(E) - \frac{\epsilon_0}{E} \right\}$$

denn $y(k) = \log(1-k) \rightsquigarrow y'(k) = \frac{-1}{1-k}$

$$\rightsquigarrow Ty(k,0) = y(0) + y'(0)k + O(k^2)$$
$$= -k + O(k^2)$$

$$g(-) := \log\{\Omega(E,V,N)\} = \log\left\{2\pi m \frac{V^N}{h^N} \frac{(2\pi m)^{\frac{3N}{2}-1}}{\Gamma(N+1)\Gamma(\frac{3N}{2})}\right\} + \left(\frac{3N}{2}-1\right)\log(E)$$
$$= \log\left\{(2\pi m)^{\frac{3N}{2}} \frac{V^N}{h^N} \frac{1}{\Gamma(N+1)\Gamma(\frac{3N}{2})}\right\} + \left(\frac{3N}{2}-1\right)\log(E)$$

$$\Rightarrow \log\{w(\epsilon_0)\} = f(\epsilon_0) - g(-) = \log\left\{(2\pi m)^{-3/2} \frac{h}{V} \frac{\Gamma(N+1)\Gamma(\frac{3N}{2})}{\Gamma(N)\Gamma(\frac{3N}{2}-\frac{3}{2})}\right\} - \frac{3}{2}\log(E) - \underbrace{\left(\frac{3N}{2}-\frac{5}{2}\right)}_{=\frac{3}{2}(N-1)-1 \ \checkmark \ \approx \frac{3}{2}N \text{ für } N \gg 1} \frac{\epsilon_0}{E}$$

Eigentlich wäre Normierung $\mathcal{N}$ hier doch schon vollständig gegeben, oder? ✓

Ja schon, schwierig bis unmöglich zu berechnen. In $\mathcal{N}$ kommt P wieder vor

$$\approx C - \frac{3}{2}N\frac{\epsilon_0}{E} = C - \frac{3}{2}\frac{\epsilon_0}{\epsilon}, \quad \epsilon := \frac{E}{N}$$

$$\Rightarrow w(\epsilon_0) \approx e^{C - \frac{3}{2}\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} = \mathcal{N} \cdot e^{-\frac{3}{2}\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} \ \checkmark$$

3. $\epsilon_0 = \frac{p^2}{2m}$, $p := |\vec{p}|$; $\epsilon = \frac{3}{2}k_B T =: \frac{3}{2\beta}$ $(\Rightarrow \beta = \frac{1}{k_B T})$

Warum nicht über ϵ_0 integrieren? ✓

$$w(\epsilon_0) = \mathcal{N} e^{-\frac{3}{2}\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} = \mathcal{N} e^{-\frac{3}{2\epsilon}\frac{p^2}{2m}} = \mathcal{N} e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} = w(\vec{p})$$

genau! → Müsste auch gehen

Wegen Normierung muss gelten:

$$1 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \, w(\vec{p}) = \int_0^\infty dp \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \mathcal{N} e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} p^2 = 4\pi\mathcal{N} \int_0^\infty dp \, p^2 e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}$$
$$= 4\pi\mathcal{N}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{4\left(\frac{\beta}{2m}\right)^{3/2}}\right\} \Leftrightarrow \mathcal{N} = \frac{1}{4\pi}\frac{4\left(\frac{\beta}{2m}\right)^{3/2}}{\sqrt{\pi}} = \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2}$$

$p<0$ → trotzdem ganzer Raum? Und ist ϵ_0 nicht beschränkt durch Gesamtenergie E?

denn $(*)$ löst man mit:

$$(*) \hat{=} \int_0^\infty dp \, p^2 e^{-cp^2} \overset{k:=cp^2}{\underset{\frac{dk}{dp}=2cp}{=}} \int_0^\infty \frac{dk}{2cp} p^2 e^{-k} = \frac{1}{2c^{3/2}} \int_0^\infty dk \sqrt{k} e^{-k} = \frac{1}{2c^{3/2}}\Gamma(3/2) = \underline{\underline{\frac{1}{2c^{3/2}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}}$$

ok!

Beschränkt aber sehr große Energien und „$\vec{p}<0$" möglich?

auch möglich: $(*) = -2m\,\partial_\beta \int_0^\infty dp \, e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}$

$\vec{p}<0$ heißt doch nur eine andere Richtung als $\vec{p}>0$!

Damit folgt also für $w(\vec{p})$ insgesamt:

$$w(p) = \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2} e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} p^2$$

, wobei das p^2 daher kommt, denn bei Integration die Funktionaldeterminante hinzugezogen werden muss (Kugelkoordinaten).

Wie kriegt man das p^2 formal rein?

↑ siehe meine Lösung

siehe meine (per Mail geschickte) Lösung!