Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

21.11.2016 Theoretische Physik IV 4. Übung Marvin Zanke

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_1$ kein Tensor, nicht Produkt!

H4) $\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hat{h}(k)$, $\hat{h}(k) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_k$

1)

Warum nicht relativistisch und nicht WW? was ändert sich bei rel. Teilchen?

$\hat{h}(k)$ ändert sich

Beh: $\phi_A(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N) = \phi_{\alpha_1}(\vec{x}_1)\phi_{\alpha_2}(\vec{x}_2)\cdot\ldots\cdot\phi_{\alpha_N}(\vec{x}_N)$, $A = \{\alpha_1,\dots,\alpha_N\}$

mit $\hat{h}\,\phi_\alpha(\vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi_\alpha(\vec{x}) = \epsilon_\alpha\phi_\alpha(\vec{x})$

löst $\hat{H}\phi_A(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N) = E_A\phi_A(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N)$, $E_A = \sum_{k=1}^{N}\epsilon_{\alpha_k}$

Ist $\hat{h}(k)\phi_{\alpha_k} \hat{=} \hat{h}\phi_\alpha$? Ja, so zu verstehen

$$\hat{H}\phi_A(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N) = \sum_{k=1}^{N}\hat{h}(k)\{\phi_{\alpha_1}(\vec{x}_1)\cdot\ldots\cdot\phi_{\alpha_N}(\vec{x}_N)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_k\{\phi_{\alpha_1}(\vec{x}_1)\cdot\ldots\cdot\phi_{\alpha_N}(\vec{x}_N)\}$$

$\mathcal{H}_1 = L(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ welcher Raum ist das? von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$

Δ_k wirkt nur auf ϕ_{α_k}

$$= \sum_{k=1}^{N}\epsilon_{\alpha_k}\{\phi_{\alpha_1}(\vec{x}_1)\cdot\ldots\cdot\phi_{\alpha_N}(\vec{x}_N)\} = \sum_{k=1}^{N}\epsilon_{\alpha_k}\phi_A(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N)$$

$$= E_A\,\phi_A(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N)$$

$\phi_A(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N)$ vor die Summe ziehen? keine k-Abh.

2) $$Z = \mathrm{Tr}[e^{-\beta H}]_{\mathcal{H}} = \sum_A \langle\phi_A|e^{-\beta\hat{H}}|\phi_A\rangle$$

$$= \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_N}\langle\phi_{\alpha_1}\dots\phi_{\alpha_N}|e^{-\beta\hat{H}}|\phi_{\alpha_1}\dots\phi_{\alpha_N}\rangle$$

Wo Annahme dass Teilchen unterscheidbar? In der Summe über alle Zst. $|2\,1\,1\rangle \hat{=} |1\,1\,2\rangle$ für ununt.

$\frac{1}{N!}$ für Bosonen und Fermionen?

$$= \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_N}\langle\phi_{\alpha_1}\dots\phi_{\alpha_N}|e^{-\beta\sum_{k=1}^{N}\hat{h}(k)}|\phi_{\alpha_1}\dots\phi_{\alpha_N}\rangle$$

$$= \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_N}\langle\phi_{\alpha_1}\dots\phi_{\alpha_N}|\prod_{k=1}^{N}e^{-\beta\hat{h}(k)}|\phi_{\alpha_1}\dots\phi_{\alpha_N}\rangle$$

$$= \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_N}\prod_{k=1}^{N}\langle\phi_{\alpha_k}|e^{-\beta\hat{h}(k)}|\phi_{\alpha_k}\rangle$$

Faktorisiert das so? $\langle\varphi_\alpha\varphi_\beta|h_\alpha h_\beta|\varphi_\alpha\varphi_\beta\rangle = \langle\varphi_\alpha|h_\alpha|\varphi_\alpha\rangle \times \langle\varphi_\beta|h_\beta|\varphi_\beta\rangle$? Ja, wg $(\langle\varphi_\alpha|\otimes\langle\varphi_\beta|)\dots(|\varphi_\alpha\rangle\otimes|\varphi_\beta\rangle)$ ⇝ Faktorisiert

$$= \sum_{\alpha_1}\langle\phi_{\alpha_1}|e^{-\beta\hat{h}(k)}|\phi_{\alpha_1}\rangle\cdot\sum_{\alpha_2}\langle\phi_{\alpha_2}|e^{-\beta\hat{h}(k)}|\phi_{\alpha_2}\rangle\cdot\ldots\cdot\sum_{\alpha_N}\langle\phi_{\alpha_N}|e^{-\beta\hat{h}(k)}|\phi_{\alpha_N}\rangle$$

$$= \prod_{k=1}^{N}\sum_{\alpha_k}\langle\phi_{\alpha_k}|e^{-\beta\hat{h}(k)}|\phi_{\alpha_k}\rangle = \prod_{k=1}^{N}\mathrm{Tr}[e^{-\beta\hat{h}(k)}]_{\mathcal{H}_1}$$

$\hat{h}$ unabhängig von k

$$\overset{\uparrow}{=} \mathrm{Tr}[e^{-\beta\hat{h}}]_{\mathcal{H}_1}^N = (Z_1)^N$$

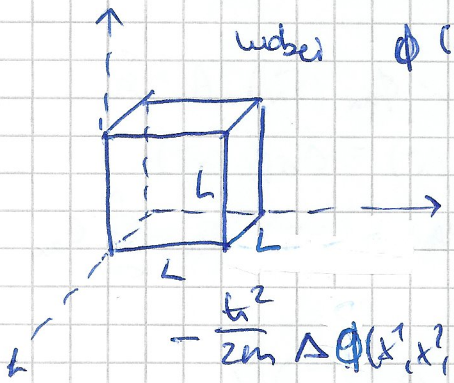
genau

„unabhängig"? Teilchen WW nicht; alle aus gleichem Raum $\mathcal{H}_1$; N mal selbes Problem

3) Beh.: $\phi(x^1,x^2,x^3) = \varphi_{k^1}(x^1)\varphi_{k^2}(x^2)\varphi_{k^3}(x^3)$ löst

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi(x^1,x^2,x^3) = \epsilon\,\phi(x^1,x^2,x^3) \quad \text{mit: } \varphi_k(x) = A\sin(kx),$$

wobei $\phi(x^1,x^2,x^3) = 0$ für $x^k < 0,\ x^k > L$ | $k = \frac{\pi}{L}n,\ n \in \mathbb{N}$, $\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2}{2m}|\vec{k}|^2$



$$\rightsquigarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_k(x) = -Ak^2\sin(kx) = -k^2\varphi_k(x) \quad (*)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi(x^1,x^2,x^3) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\left\{\varphi_{k^1}(x^1)\varphi_{k^2}(x^2)\varphi_{k^3}(x^3)\right\}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\varphi_{k^2}(x^2)\varphi_{k^3}(x^3)\frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2}\varphi_{k^1}(x^1) + \varphi_{k^1}(x^1)\varphi_{k^3}(x^3)\frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2}\varphi_{k^2}(x^2) + \varphi_{k^1}(x^1)\varphi_{k^2}(x^2)\frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}\varphi_{k^3}(x^3)\right\}$$

$$\overset{(*)}{=} -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{-(k^1)^2\varphi_{k^1}(x^1)\varphi_{k^2}(x^2)\varphi_{k^3}(x^3) - (k^2)^2\varphi_{k^1}(x^1)\varphi_{k^2}(x^2)\varphi_{k^3}(x^3) - (k^3)^2\varphi_{k^1}(x^1)\varphi_{k^2}(x^2)\varphi_{k^3}(x^3)\right\}$$

$$= \left\{\frac{\hbar^2}{2m}|\vec{k}|^2\right\}\varphi_{k^1}(x^1)\varphi_{k^2}(x^2)\varphi_{k^3}(x^3) = \underbrace{\frac{\hbar^2|\vec{k}|^2}{2m}}_{\epsilon\text{, wie behauptet}}\phi(x^1,x^2,x^3)$$

Außerdem gilt wegen $k^i = \frac{\pi}{L}n^i$, dass $\phi(x^1,x^2,x^3) = 0$ für $x^i = L$ oder $x^i = 0$ (damit auch für $x^i > L$, $x^i < 0$ wg. Stetigkeit)

Wie sorgt man dafür dass $\varphi_k(x^i) = 0$ für $x^i < 0$ und $x^i > L$ und nicht nur für $x^i = L$, $x^i = 0$?

denn:

$$\varphi_{k^i}(x^i) = A_i\sin(k^ix^i) = A_i\sin\left(\frac{\pi}{L}n^ix^i\right)$$

$$= \begin{cases} A_i\sin(\pi n^i) & \text{für } x^i = L \\ A_i\sin(0) & \text{für } x^i = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } x^i = L \quad \text{denn } \sin(x) = 0 \text{ für } x = n\pi,\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } x^i = 0 \end{cases}$$

Einfach 0 setzen, explizit nur in dem Gebiet gesucht

genau!

Zieh das Argument rückwärts auf:

$\varphi_{k_i}(x^i \in N) = 0$ für $N = \{0, L\}$

$\Rightarrow k_i^i = \frac{\pi}{L}n^i$, $n^i \in \mathbb{Z}$, nicht umgekehrt.

4) $Z_1 = \mathrm{Tr}[e^{-\beta \hat{h}}]_{\mathcal{H}_1} = \sum_{\alpha} \langle \phi_{\alpha \vec{n}} | e^{-\beta \hat{h}} | \phi_{\alpha \vec{n}} \rangle$

$= \sum_{\vec{n}} e^{-\beta \epsilon_{\vec{n}}} = \sum_{\vec{k}=\frac{\pi}{L}\vec{n},\, \vec{n}\in\mathbb{N}^3} e^{-\beta \epsilon_{\vec{k}}}$

Wo genau kommt $\vec{n}$ statt n ins Spiel? ✓

$\approx \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \int_0^\infty dk^1\, e^{-\beta \frac{\hbar^2 (k^1)^2}{2m}} \int_0^\infty dk^2\, e^{-\beta \frac{\hbar^2 (k^2)^2}{2m}} \int_0^\infty dk^3\, e^{-\beta \frac{\hbar^2 (k^3)^2}{2m}}$

Direkt am Anfang (s. 3)

$\left(\frac{1}{2}\right)^3$ wg. Int. von $-\infty$ bis ∞ und Sym. Integrand ✓

$= \frac{1}{8}\left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^\infty dk^1\, e^{-\beta \frac{\hbar^2 (k^1)^2}{2m}} \int_{-\infty}^\infty dk^2\, e^{-\beta \frac{\hbar^2 (k^2)^2}{2m}} \int_{-\infty}^\infty dk^3\, e^{-\beta \frac{\hbar^2 (k^3)^2}{2m}}$

$= \frac{L^3}{8\pi^3}\left(\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta\hbar^2}}\right)^3 = V\left(\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta\hbar^2}}\,\frac{1}{2\pi}\right)^3$

Wofür der Tippomit $\int dx\, x^2 e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$? ✓

Man kann das Integral auch anders lösen → 3. dim Int. → Kugelkoordinaten

$= \frac{V}{8\pi^{3/2}}\left(\frac{2m}{\beta\hbar^2}\right)^{3/2}$ ✓

5) $\log Z = \log\left\{\frac{1}{N!}(Z_1)^N\right\} = -\log(N!) + N\log(Z_1)$

Stirling-Formel

$\approx -N\log N + N + N\log\left\{\left(\frac{2m}{\beta\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{V}{8\pi^{3/2}}\right\}$

Wofür das $\frac{c^3}{c^3}$ multipliziert?

$= N\log\left\{\frac{V}{N}\,\frac{1}{\hbar^3}\,\frac{c^3}{c^3}\left(\frac{m}{2\beta}\right)^{3/2}\frac{1}{\pi^{3/2}}\right\} + N$

$= N\log\Big\{\underbrace{\frac{V}{N(\hbar c)^3}\left(\frac{mc^2}{2\pi\beta}\right)^{3/2}}_{=:\,x}\Big\} + N$

6) $\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z(\beta, V, N) = -N\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\beta}$

$= -N\frac{1}{x}\left(-\frac{3}{2}\right)x\cdot\frac{1}{\beta} \underset{\beta=\frac{1}{k_B T}}{=} \frac{3}{2}Nk_B T$

Kann man das direkt benutzen oder $P = -\langle \partial H / \partial V\rangle$? ✓

Kann direkt das gezeigte nehmen

7) $P = k_B T\frac{\partial}{\partial V}\log Z = k_B T N\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial V}$

$= k_B T N\cdot\frac{1}{x}\cdot x\,\frac{1}{V} = \underline{\frac{k_B T N}{V}}$

$\Leftrightarrow P\cdot V = k_B T N$ ✓

8)

$$S = -k_B \langle \log \hat{\rho} \rangle = -k_B \langle \log (\tfrac{1}{Z} e^{-\hat{H}/k_B T}) \rangle$$

$$= -k_B \langle -\log Z - \beta \hat{H} \rangle = k_B \log Z + k_B \beta \langle \hat{H} \rangle$$

$$= N k_B \log \left\{ \frac{V}{N(\hbar c)^3} \left(\frac{mc^2}{2\pi\beta} \right)^{3/2} \right\} + N k_B + \frac{3}{2} N k_B$$

$$= \frac{5}{2} N k_B + N k_B \log \left\{ \frac{V}{N} \left(\frac{mc^2}{2\hbar^2 c^2 \pi \beta} \right)^{3/2} \right\}$$

$$= \frac{5}{2} N k_B + N k_B \log \left\{ \frac{V}{N} \left(\frac{4\pi^2 m}{2 h^2 \pi \beta} \right)^{3/2} \right\}$$

$$= \frac{5}{2} N k_B + N k_B \log \left\{ \frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right\}$$

$$= \frac{5}{2} N k_B + N k_B \log \left\{ \frac{V}{N \lambda(T)^3} \right\}, \quad \lambda(T) := \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

ok!