Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

M-fach besetzt?

Theoretische Physik IV 5-Übung (NICHT ABGEGEBEN) Marvin Zanke

Der Ost. im angeregten Zustand M

H5) Man bemerkt, dass das gegebene System μ-kanonisch beschrieben wird.
Für den Entartungsfaktor gilt (gegeben) $W_N(M) = \frac{(3N+M-1)!}{M!\,(3N-1)!}$

Woher kommt gerade diese Entartung?

wobei M die Besetzungszahl der N 3-dim. H.O. ist.

Für die Entropie gilt: $S = k_B \log(\Omega(E)\Delta)$ für unterscheidbare Zustände. Durch die Entartung wird dies zu:

$\Omega(E)$ dadurch teilen?

$$S' = k_B \log\left(\frac{\Omega(E)}{W_N(M)}\right) = k_B\left\{\log(\Omega(E)) - \log(W_N(M))\right\}$$

Für ~~den~~ N 1-dim. H.O. haben wir das Problem (NICHT-ENTARTET FÜR 1-dim.) bereits gelöst. Dort galt:

log N interessiert nicht, weil

$$\log(\Omega(E)) = N\left\{\left(\frac{\epsilon+\hbar\omega/2}{\hbar\omega}\right)\log\left(\frac{\epsilon+\frac{\hbar\omega}{2}}{\hbar\omega}\right) - \left(\frac{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}{\hbar\omega}\right)\log\left(\frac{\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}}{\hbar\omega}\right)\right\} + \mathcal{O}(\log N)$$

Da N und M sehr groß (gegeben), können wir die Stirling-Formel in der Form $\log(N!) \approx N\log N - N$ nutzen:

Diese Stirling Formel?

$$\log(W_N(M)) = \log\left\{\frac{(3N+M-1)!}{M!\,(3N-1)!}\right\} = \log((3N+M-1)!) - \log(M!) - \log((3N-1)!)$$

$$\approx \left[(3N+M-1)\log(3N+M-1) - (3N+M-1)\right] - \left[M\log(M) - M\right] - \left[(3N-1)\log(3N-1) - (3N-1)\right]$$

$$= (3N+M-1)\log(3N+M-1) - M\log(M) - (3N-1)\log(3N-1)$$

$$\overset{(*)}{\approx} (3N+M)\log(3N+M) - M\log M - 3N\log(3N)$$

Wir können das N-fache 1-dim. H.O. Problem mittels den Transformationen $N \mapsto 3N$ und $E \mapsto \hbar\omega\left(\frac{3N}{2}+M\right)$ auf unser Problem übertragen.
Für $\epsilon = \frac{E}{N}$ gilt hier: $\epsilon = \frac{\hbar\omega\left(\frac{3N}{2}+M\right)}{3N}$ und für $\log(\Omega(\epsilon))$ folgt dann:

$$\log(\Omega(\epsilon)) = 3N\left\{\left(\frac{3N+M}{3N}\right)\log\left(\frac{3N+M}{3N}\right) - \left(\frac{M}{3N}\right)\log\left(\frac{M}{3N}\right)\right\}$$

$$= (3N+M)\log\left(\frac{3N+M}{3N}\right) - M\log\left(\frac{M}{3N}\right)$$

Führt man beide Ergebnisse zusammen so erhält man:

$$S = k_B \left\{ \log(\Omega(E)) - \log(N_N(M)) \right\}$$

$$\overset{(*)}{\approx} k_B \left\{ \left[(3N+M)\log\left(\frac{3N+M}{3N}\right) - M\log\left(\frac{M}{3N}\right) \right] - \left[(3N+M)\log(3N+M) - M\log M - 3N\log(3N) \right] \right\}$$

$$= k_B \left\{ -(3N+M)\log(3N) + M\log(3N) + 3N\log(3N) \right\} = 0 \quad \text{ups...}$$

NOCHMAL OHNE DIE NÄHERUNG (*) VON VORIGER SEITE

$$S = k_B \left\{ \left[(3N+M)\log\left(\frac{3N+M}{3N}\right) - M\log\left(\frac{M}{3N}\right) \right] - \left[(3N+M-1)\log(3N+M-1) - M\log M - (3N-1)\log(3N-1) \right] \right\}$$

$$= k_B \left\{ (3N+M)\log(3N+M) - (3N+M)\log(3N) + M\log(3N) - (3N+M-1)\log(3N+M-1) + (3N-1)\log(3N-1) \right\}$$

$$= k_B \left\{ (3N+M)\log(3N+M) - 3N\log(3N) - (3N+M-1)\log(3N+M-1) + (3N-1)\log(3N-1) \right\}$$

$$\overset{M = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{3N}{2}}{=} k_B \left\{ \left(\frac{3N}{2} + \frac{E}{\hbar\omega}\right)\log\left(\frac{3N}{2} + \frac{E}{\hbar\omega}\right) - \left(\frac{3N}{2} + \frac{E}{\hbar\omega} - 1\right)\log\left(\frac{3N}{2} + \frac{E}{\hbar\omega} - 1\right) + (3N-1)\log(3N-1) \right\}$$

$$= N k_B \left\{ \left(\epsilon + \frac{3}{2}\right)\log\left(N\epsilon + \frac{3N}{2}\right) - \left(\epsilon + \frac{3}{2} - \frac{1}{N}\right)\log\left(N\epsilon + \frac{3N}{2} - 1\right) + \left(3 - \frac{1}{N}\right)\log(3N-1) - 3\log(3N) \right\}$$

$$= N k_B \left\{ \frac{1}{N}\log N + \left(\epsilon + \frac{3}{2}\right)\log\left(\epsilon + \frac{3}{2}\right) - \left(\epsilon + \frac{3}{2}\right)\log\left(\epsilon + \frac{3}{2} - \frac{1}{N}\right) + \left(3 - \frac{1}{N}\right)\log N + \left(3 - \frac{1}{N}\right)\log\left(3 - \frac{1}{N}\right) - 3\log 3 - 3\log N \right\}$$

$$= N k_B \left\{ \left(\epsilon + \frac{3}{2}\right)\log\left(\epsilon + \frac{3}{2}\right) - \left(\epsilon + \frac{3}{2}\right)\log\left(\epsilon + \frac{3}{2} - \frac{1}{N}\right) + \left(3 - \frac{1}{N}\right)\log\left(3 - \frac{1}{N}\right) - 3\log 3 \right\}$$

$$\rightsquigarrow \quad s = \frac{S'}{N k_B} = \left(\epsilon + \tfrac{3}{2}\right) \log\left(\epsilon + \tfrac{3}{2}\right) - \left(\epsilon + \tfrac{3}{2}\right) \log\left(\epsilon + \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{N}\right)$$
$$+ \left(3 - \tfrac{1}{N}\right) \log\left(3 - \tfrac{1}{N}\right) - 3 \log 3$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S'}{\partial E}\right)_N = \frac{\partial \epsilon}{\partial E}\left(\frac{\partial S'}{\partial \epsilon}\right)_N$$

$$= \frac{k_B}{\hbar\omega} \left\{ \log\left(\epsilon + \tfrac{3}{2}\right) + 1 - \log\left(\epsilon + \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{N}\right) - \frac{\epsilon + 3/2}{\epsilon + 3/2 - 1/N} \right\}$$

Wieso gilt hier jetzt nicht mehr dass dies bei $\frac{1}{N} \approx 0$ wegfällt?

$$= \frac{k_B}{\hbar\omega} \left\{ \log\left(\frac{\epsilon + 3/2}{\epsilon - 3/2}\right) - \frac{1}{N} \frac{1}{\epsilon + \frac{3}{2} - 1/N} \right\}$$

$$\approx \frac{k_B}{\hbar\omega} \log\left(\frac{\epsilon + 3/2}{\epsilon - 3/2}\right)$$

... analog zum anderen Ansatz?

ANDERER ANSATZ:

$$S' = k_B \log(\Omega(E)\Delta) = k_B \log(W_N(M))$$

$$= k_B \log\left\{\frac{(3N+M-1)!}{M!(3N-1)!}\right\} = k_B\left\{\log[(3N+M-1)!] - \log(M!) - \log[(3N-1)!]\right\}$$

$$\approx k_B\Big\{(3N+M-1)(\log(3N+M-1)) - (3N+M-1)$$
$$-(M\log M - M) - ((3N-1)\log(3N-1) - (3N-1))\Big\}$$

$$= k_B\left\{(3N+M-1)\log(3N+M-1) - M\log M - (3N-1)\log(3N-1)\right\}$$

$$\approx k_B\left\{(3N+M)\log(3N+M) - M\log M - 3N\log(3N)\right\}$$

$E=\hbar\omega(\frac{3N}{2}+M)$

$$= k_B\Big\{\left(3N+\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{3N}{2}\right)\log\left(3N+\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{3N}{2}\right)$$
$$-\left(\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{3N}{2}\right)\log\left(\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{3N}{2}\right) - 3N\log(3N)\Big\}$$

$$= k_B\Big\{\left(\frac{3N}{2}+\frac{E}{\hbar\omega}\right)\log\left(\frac{3N}{2}+\frac{E}{\hbar\omega}\right)$$
$$-\left(\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{3N}{2}\right)\log\left(\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{3N}{2}\right) - 3N\log(3N)\Big\}$$

$$= k_B\Big\{\left(\frac{3N}{2}+\frac{E}{\hbar\omega}\right)\log\left[N\left(\frac{3}{2}+\epsilon\right)\right]$$
$$-\left(\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{3N}{2}\right)\log\left[N\left(\epsilon-\frac{3}{2}\right)\right] - 3N\log(3N)\Big\}$$

$$= Nk_B\Big\{\left(\epsilon+\frac{3}{2}\right)\left\{\log(N)+\log\left(\epsilon+\frac{3}{2}\right)\right\}$$
$$-\left(\epsilon-\frac{3}{2}\right)\left\{\log(N)+\log\left(\epsilon-\frac{3}{2}\right)\right\} - 3\log(3N)\Big\}$$

$$= Nk_B\left\{\left(\epsilon+\frac{3}{2}\right)\log\left(\epsilon+\frac{3}{2}\right) - \left(\epsilon-\frac{3}{2}\right)\log\left(\epsilon-\frac{3}{2}\right) - 3\log 3\right\}$$

$$\approx Nk_B\left\{\left(\epsilon+\frac{3}{2}\right)\log\left(\epsilon+\frac{3}{2}\right) - \left(\epsilon-\frac{3}{2}\right)\log\left(\epsilon-\frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow s = \frac{S}{Nk_B} = \left(\epsilon+\frac{3}{2}\right)\log\left(\epsilon+\frac{3}{2}\right) - \left(\epsilon-\frac{3}{2}\right)\log\left(\epsilon-\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{k_B}{\hbar\omega}\left\{\log\left(\epsilon+\frac{3}{2}\right) - \log\left(\epsilon-\frac{3}{2}\right)\right\} = \log\left(\frac{\epsilon+\frac{3}{2}}{\epsilon-\frac{3}{2}}\right)\cdot\frac{k_B}{\hbar\omega}$$

$$\left(= \frac{\partial S}{\partial \epsilon}\frac{\partial \epsilon}{\partial E}\right)$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{\hbar\omega}{k_B}\,\frac{1}{\log\left(\frac{\epsilon+\frac{3}{2}}{\epsilon-\frac{3}{2}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar\omega}{k_BT} = \log\left(\frac{E/N\hbar\omega + 3/2}{E/N\hbar\omega - 3/2}\right) \Leftrightarrow e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}} = \frac{E/N\hbar\omega + 3/2}{E/N\hbar\omega - 3/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{E}{N\hbar\omega} = \frac{3}{2}\,\frac{e^{\hbar\omega/k_BT}+1}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{3}{2}N\hbar\omega\,\frac{e^{\hbar\omega/k_BT}+1}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}$$

$$\left| \begin{aligned} & e^z = \frac{x+3/2}{x-3/2} \\ \Leftrightarrow\ & (x-3/2)e^z = x+3/2 \\ \Leftrightarrow\ & x(e^z-1) = 3/2\,(e^z+1) \end{aligned} \right|$$

$$\rightsquigarrow C(E) = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_N = \frac{3}{2}N\hbar\omega\,\frac{\left\{e^{\hbar\omega/k_BT}\left(-\frac{\hbar\omega}{k_BT^2}\right)\right\}\left\{\left(e^{\hbar\omega/k_BT}-1\right)-\left(e^{\hbar\omega/k_BT}+1\right)\right\}}{\left(e^{\hbar\omega/k_BT}-1\right)^2}$$

$$= \frac{3N\hbar^2\omega^2}{k_BT^2}\,\frac{e^{\hbar\omega/k_BT}}{\left(e^{\hbar\omega/k_BT}-1\right)^2}$$

$$\left| \left(\frac{x+3/2}{x-3/2}-1\right)^2 = \left(\frac{3}{x-3/2}\right)^2 \right.$$

$$= \frac{3Nk_B}{t^2}\,\frac{e^{1/t}}{\left(e^{1/t}-1\right)^2} = \frac{3Nk_B}{t^2}\,\frac{\left(\frac{E/N\hbar\omega + 3/2}{E/N\hbar\omega - 3/2}\right)}{\frac{9}{\left(E/N\hbar\omega - 3/2\right)^2}}$$

$$= \frac{Nk_B}{3}\log^2\left(\frac{E/N\hbar\omega + 3/2}{E/N\hbar\omega - 3/2}\right)\left(E/N\hbar\omega + 3/2\right)\left(E/N\hbar\omega - 3/2\right)$$

$$E(T) \xrightarrow{T\to 0} \frac{3}{2}N\hbar\omega$$

$$\xrightarrow{T\to\infty} \frac{3}{2}N\hbar\omega\,\frac{2+\frac{\hbar\omega}{k_BT}}{\frac{\hbar\omega}{k_BT}} = \frac{3}{2}Nk_BT\left(2+\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)$$