Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

03.12.2016 Theoretische Physik IV Marvin Zanke

H9) $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}$ $C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N}$, $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N}$

$-S$	U	V
H		F
$-P$	G	T

- $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{T,N} \overset{!}{=} V(1-\alpha T)$

mit $dH = TdS + VdP + \mu dN$ folgt

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_{P,N}\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{S,N}\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial P}\right)_{T,N} + \left(\frac{\partial H}{\partial N}\right)_{S,P}\cdot\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)_{T,N}$$

$$= T\cdot\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} + V$$

und mit $dG = -SdT + VdP + \mu dN$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial P}\underbrace{\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P,N}}_{-S}\right]_{T,N} = \left[\frac{\partial}{\partial T}\underbrace{\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T,N}}_{V}\right]_{P,N}$$

$$= -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N} + V$$

$$= V(1-\alpha T)$$

- $\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{P,N} \overset{!}{=} C_P - \alpha P V$

(*) mit $dE = TdS - PdV + \mu dN$ folgt

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{P,N} = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N}\cdot\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N} + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N} + \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V}\cdot\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{P,N}$$

$$= T\cdot\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N} + (-P)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}$$

$$= T\cdot\frac{C_P}{T} - P\,\alpha\cdot V = C_P - \alpha P V$$

- $\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_{T,N} \overset{!}{=} \kappa_T P V - \alpha T V$; mit (*) folgt wieder:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N}\cdot\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N} + \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V}\cdot\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)_{T,N}$$

$$= T\cdot\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} + (-P)\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N}$$

wieder mit dG von oben

$$= -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N} - P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N}$$

$$= -T\alpha V + PV\kappa_T = \kappa_T P V - \alpha T V$$

---

wieso T konstant bei $H(S,P,N)$?

Warum falsch $P\cdot V = Nk_BT$, $E = \frac{3}{2}Nk_BT$ $\Rightarrow H = E + PV = \frac{5}{2}Nk_BT$ $\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{5}{2}V$?

kein ideales Gas!

$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S = V$ wg. $dH = TdS + VdP$?

was konstant halten bei 2. part. Abl. der Kettenregel?

Ist $\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)_{T,N} = 0$ oder $\left(\frac{\partial H}{\partial N}\right)_{S,P} = 0$? ja

Quickie 6.5: kan. Systeme?

$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N}$ mit $dS = \frac{1}{T}dE + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$ E und V Abhängigkeit?

Wofür brauchen wir $d^2G = 0$?

→ eine Beziehung thermodyn. Variablen

H10)

Was ist $E(T,V)$ – "Zustandsglg"?

$$P \cdot V = \alpha E(T,V), \quad \alpha_{\in \mathbb{R}} > 0 \iff P = \frac{\alpha}{V} E(T,V), \quad E(T,V) = \frac{P \cdot V}{\alpha}$$

1. Benutzt man die MW-Relation $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$, so folgt

homogen??

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V} \left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_T$$

N fest →
$$= T \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V + (-P)$$ denn $dE = TdS - PdV + \mu dN$

$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T \overset{?}{=} \frac{P}{\alpha}$

$$= T \frac{\alpha}{V} \left(\frac{\partial E(T,V)}{\partial T}\right)_V - P$$ und MW-Rel. folgt aus: $dF = -SdT - PdV + \mu dN$

$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = \underbrace{\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)}_{T} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T}_{\neq} = P$

$$= \frac{\alpha T}{V} \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V - \frac{\alpha}{V} E = -\frac{\alpha}{V} E + \frac{\alpha T}{V} \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$$

$\in C^1(\mathbb{R})$

2. $E(T,V) = V^{-\alpha} \Phi(TV^\alpha)$ löst die PDG, denn

"$\frac{\partial}{\partial(TV^\alpha)}$" ok?

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = -\alpha V^{-\alpha-1} \Phi(TV^\alpha) + V^{-\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial(TV^\alpha)} \Phi(TV^\alpha)\right) (T\alpha V^{\alpha-1})$$

Allg. Lösung?

$$= -\frac{\alpha}{V} V^{-\alpha} \Phi(TV^\alpha) + \frac{\alpha T}{V} \Phi'(TV^\alpha)$$, wobei $\Phi'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x)$

$$= -\frac{\alpha}{V} E(T,V) + \frac{\alpha T}{V} \underbrace{\Phi'(TV^\alpha)}_{= \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V}$$

$= \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$, denn $\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = V^{-\alpha} \Phi'(TV^\alpha) V^\alpha = \Phi'(TV^\alpha)$

$$= -\frac{\alpha}{V} E(T,V) + \frac{\alpha T}{V} \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$$

Kann man anders machen? bspw. parm. $S = \Psi(TV)$?

3. $$\Phi'(TV^\alpha) \overset{s.o.}{=} \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V} \cdot \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_V$$

$$= T \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V - P \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

$\leadsto S = \Psi(T,V)$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T \overset{dE = \dots}{=} T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P \left(\frac{\partial V}{\partial V}\right)_T$$

$$\overset{1.}{=} \underbrace{-\frac{\alpha}{V} E}_{-P} + \frac{\alpha T}{V} \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$$

$$\iff T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{\alpha T}{V} \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$$

$$\iff \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{\alpha}{V} \Phi'(TV^\alpha)$$

$$\Longrightarrow S = \Psi(T,V), \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{\alpha}{V} \cdot \Phi'(TV^\alpha), \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T} \Phi'(TV^\alpha)$$

$S = \Psi(TV^\alpha)$ löst diese Bedingungen, denn

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \Psi'(TV^\alpha)\cdot \alpha T V^{\alpha-1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \Psi'(TV^\alpha) V^\alpha$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{V}\phi'(TV^\alpha) \qquad\qquad \stackrel{!}{=} \frac{1}{T}\phi'(TV^\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad TV^\alpha \Psi'(TV^\alpha) = \phi'(TV^\alpha)$$

4. $$0 = \left(\frac{\partial(E/V)}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T - \frac{E}{V^2} = \frac{1}{V}\left\{-\frac{\alpha}{V}E + \frac{\alpha T}{V}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V\right\} - \frac{E}{V^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad E\{1+\alpha\} = \alpha T\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{E}{V}\{1+\alpha\} = \alpha T \frac{1}{V}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$$

Sep. der Variablen

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{T} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{\frac{E}{V}}\left(\frac{\partial(E/V)}{\partial T}\right)_V \Leftrightarrow \int \frac{1}{T}\,dT = \frac{\alpha}{1+\alpha}\int \frac{1}{\frac{E}{V}}\,d\left(\frac{E}{V}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(T) = \frac{\alpha}{1+\alpha}\ln\left(\frac{E}{V}\right) + C$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(E/V) = \frac{1+\alpha}{\alpha}\ln(T) - C'$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{E}{V} = \sigma T^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}$$

gut!

Was wenn hier nicht durch V geteilt? Ergebnis: $E = C' T^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}$