Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

08.12.2016 Theoretische Physik IV 7. Übung — Marvin Zanke

H9)

(∂S/∂T) mit bar? ✓
Ja, aber da V, N konstant auch $\bar V = \frac{V}{N}$

1. $$\bar C_V = T\left(\frac{\partial \bar S}{\partial T}\right)_V = T\,\frac{\partial(\bar S,\bar V)}{\partial(T,\bar V)} = T\,\frac{\partial(\bar S,\bar V)}{\partial(T,P)}\,\frac{\partial(T,P)}{\partial(T,\bar V)}$$

$$= T\left(\frac{\partial P}{\partial \bar V}\right)_T\left\{\left(\frac{\partial \bar S}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial \bar V}{\partial P}\right)_T - \left(\frac{\partial \bar S}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial \bar V}{\partial T}\right)_P\right\}$$

Was wird alles durch N geteilt? Warum T, P nicht? ✓
Nur extensive Größen

$$= \underbrace{T\left(\frac{\partial \bar S}{\partial T}\right)_P}_{\bar C_p} - \underbrace{T\,\frac{\left(\frac{\partial \bar S}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial \bar V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial \bar V}{\partial P}\right)_T}}_{T\,\frac{-\left(\frac{\partial \bar V}{\partial T}\right)_P \alpha \bar V}{-\bar V \kappa_T}}$$

Maxwell Rel.: $\left(\frac{\partial \bar S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial \bar V}{\partial T}\right)_P$

$\kappa_T = \kappa_T$ ← mit $\bar V$ statt V ✓
κ_T hängt dann wg. $\frac{1}{\bar V}\frac{\partial}{\partial P}(\bar V)$ nicht mehr von N ab ⇒ gleich wie κ_T (nicht für $C_V \neq 0$)

$$= \bar C_p - T\,\frac{\alpha^2 \bar V^2}{\bar V \kappa_T} = \bar C_p - \frac{\alpha^2 T \bar V}{\kappa_T}$$

$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$ und nicht $\left(\frac{\partial T}{\partial \bar V}\right)_{\bar H}$?

2. $$\mu_{JT} \overset{!}{=} \left(\frac{\partial T}{\partial \bar V}\right)_{\bar H} = \frac{\partial(T,\bar H)}{\partial(\bar V,\bar H)} = \frac{\partial(T,\bar H)}{\partial(T,\bar V)}\,\frac{\partial(T,\bar V)}{\partial(\bar V,\bar H)} = -\frac{\partial(T,\bar H)}{\partial(T,\bar V)}\,\frac{\partial(T,\bar V)}{\partial(\bar H,\bar V)}$$

$$= -\frac{\left(\frac{\partial \bar H}{\partial \bar V}\right)_T}{\left(\frac{\partial \bar H}{\partial T}\right)_{\bar V}} = -\frac{\left\{\left(\frac{\partial \bar H}{\partial P}\right)_S\left(\frac{\partial P}{\partial \bar V}\right)_T + \left(\frac{\partial \bar H}{\partial \bar S}\right)_P\left(\frac{\partial \bar S}{\partial \bar V}\right)_T\right\}}{\left\{\left(\frac{\partial \bar H}{\partial \bar S}\right)_P\left(\frac{\partial \bar S}{\partial T}\right)_{\bar V} + \left(\frac{\partial \bar H}{\partial P}\right)_S\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\bar V}\right\}}$$

$dH = T\,dS + V\,dP + \mu\,dN$
$\Leftrightarrow d\bar H = T\,d\bar S + \bar V\,dP + \bar\mu\,d\bar N$

Unterschiedlicher Ansatz als mit Kettenregel? ✓
Ist quasi der Beweis für die Kettenregel

$\frac{1}{\kappa_T} = -\bar V\left(\frac{\partial P}{\partial \bar V}\right)_T$

$$= -\frac{\left\{\bar V\left(-\frac{1}{\kappa_T \bar V}\right) + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\bar V}\right\}}{T\,\frac{\bar C_V}{T} + \bar V\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\bar V}}$$

N const.? ✓
Ja, Joule Thompson Exp.

$\left(\frac{\partial \bar H}{\partial P}\right)_S\left(\frac{\partial P}{\partial \bar V}\right)_{\bar H}$

$\left(\frac{\partial \bar S}{\partial \bar V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\bar V}$ (Maxwell-Rel.)

$\left(\frac{\partial \bar V}{\partial \bar H}\right)_{\bar V} \overset{?}{=} 0$ ✓
Ja, konstantes $\bar V$ ⇒ $\bar V$ variiert mit nichts

$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \beta_S P$

$P \cdot \beta_S = \frac{\alpha}{\kappa_T}$ (Vorlesung)

$$= -\frac{-\frac{1}{\kappa_T} + T\beta_S P}{\bar C_V + \bar V \beta_S P} = -\frac{-\frac{1}{\kappa_T} + T\frac{\alpha}{\kappa_T}}{\bar C_V + \bar V\frac{\alpha}{\kappa_T}}$$

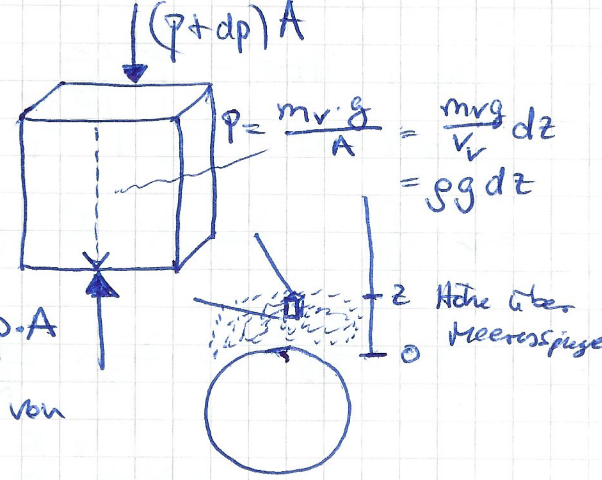
Gelten alle th.dyn. Diff. auch für $\bar V$? ✓
Ja, einfach durch N teilen, immer extensive und intensive Größe gemischt

$$= -\frac{T\alpha - 1}{\bar C_V \kappa_T + \alpha \bar V} \overset{1.}{=} \frac{1 - \alpha T}{\bar C_p \kappa_T - \alpha^2 T \bar V + \alpha \bar V} = \frac{1 - \alpha T}{\bar C_p \kappa_T + \alpha \bar V(1 - \alpha T)}$$

H10)

1. Betrachte infinitesimal kleines Volumen des Gases. Da dieses sich im Gleichgewichtszustand befindet, also Kräftegleichgewicht von oben und unten gilt, folgt:

Wieso muss Gleichgewicht herrschen? ✓
Modell



$$\rightsquigarrow F_o = F_u \iff p \cdot A = (p+dp)A + \rho g A\, dz$$

$$\iff dp = -\rho g\, dz$$

Ideale G.G. $nRT = p \cdot V$

$$\iff dp = -\frac{M}{V} g\, dz$$

$$\iff dp = -\frac{n\mu}{V} g\, dz = -\frac{n\mu RT}{RTV} g\, dz = -\frac{\mu PV}{RTV} g\, dz$$

$$\iff \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz$$

Ist das P hier = Druck in dem Volumen V? ?

T(z) und wo noch z-Abhängigkeit ✓
T(z), P(z), dP(z)

warum $P \cdot V_m$ const? ?

2. Es gilt nach wie vor: $P \cdot V_m = N_A k_B T$ ← N_A Teilchen in $V_m(z)$

$$\xrightarrow{\text{Ableiten}} \left(\frac{dP(z)}{dz}\right) V_m(z) + P(z) \frac{dV_m(z)}{dz} = N_A k_B \frac{dT(z)}{dz} \quad (*)$$

Außerdem gilt $P \cdot V_m^{\gamma} = \text{const}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{dP(z)}{dz} V_m^{\gamma} + \gamma V_m(z)^{\gamma-1} \frac{dV_m(z)}{dz} P(z)$$

$$\iff 0 = \frac{1}{\gamma} \frac{dP(z)}{dz} V_m(z) + \frac{dV_m(z)}{dz} P(z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma} \frac{dP(z)}{dz} V_m(z) = -\frac{dV_m(z)}{dz} P(z)$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{dP(z)}{dz} V_m(z) - N_A k_B \frac{dT(z)}{dz}$$

$$\iff \frac{dP(z)}{dz} V_m(z) \left\{ \frac{1}{\gamma} - 1 \right\} = -N_A k_B \frac{dT(z)}{dz}$$

$$\iff \frac{dP(z)}{dz} V_m(z) \frac{\gamma - 1}{\gamma} = N_A k_B \frac{dT(z)}{dz}$$

$$\iff \frac{dP(z)}{dz} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{N_A k_B}{V_m(z)} \frac{dT(z)}{dz}$$

$P(z) V_m(z) = N_A k_B T(z)$

$$\iff dP(z) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P(z)}{T(z)} dT(z)$$

$$\iff \frac{dP(z)}{P(z)} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT(z)}{T(z)}$$

mit dz multiplizieren? ✓
Formal kann man statt den Ableitungen auch Differentiale bilden

3. Aus 1: $dz = -\frac{dP}{P}\frac{RT}{\mu g}$

Aus 2: $dT = \frac{\gamma-1}{\gamma} T \frac{dP}{P}$

$\rightarrow \frac{dT}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma} T \frac{dP}{P} \cdot (-1) \frac{P}{dP} \frac{\mu g}{RT}$

$\Leftrightarrow \frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}$, $\gamma = 1{,}4$ für Stickstoff N

$m = 14u \Rightarrow \mu = 14 \cdot 10^{-3}$ kg

$= -4{,}72 \cdot 10^{-3} \frac{K}{m}$

$= -4{,}72 \frac{K}{km}$

$\frac{dT}{dz} = \frac{1-\gamma}{\gamma R}\mu g$

✓ Molekülmasse $\hat{=}$ Atommasse

NEIN $N_2 \Rightarrow \mu = 28 \frac{g}{mol}$

$-9{,}4$ K/km

4. Wir definieren $\frac{dT}{dz} = \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{\mu g}{R} =: \delta_{T,z} = -4{,}72 \frac{K}{km}$

$\rightsquigarrow T(z) = \delta_{T,z} \cdot z + T_0$ (da $z=0$ (Höhe Meeresspiegel $\Rightarrow T(0) = T_0$)

$\rightsquigarrow \frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} dz \Leftrightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{R}\frac{1}{\delta_{T,z}\cdot z + T_0} dz$

$\Leftrightarrow \ln(P) = -\frac{\mu g}{R}\frac{1}{\delta_{T,z}} \ln(\delta_{T,z}\cdot z + T_0) + C$

$\Leftrightarrow P = (\delta_{T,z}\cdot z + T_0)^{-\frac{\mu g}{R\delta_{T,z}}} \cdot C'$

Mit $P(0) = P_0 \Rightarrow T_0^{-\frac{\mu g}{R\delta_{T,z}}} \cdot C' = P_0$

$\Leftrightarrow C' = P_0 T_0^{\frac{\mu g}{R\delta_{T,z}}}$

$\rightsquigarrow P(z) = P_0 T_0^{\frac{\mu g}{R\delta_{T,z}}} (\delta_{T,z}\cdot z + T_0)^{-\frac{\mu g}{R\delta_{T,z}}}$

Und in unserem Fall für $\delta_{T,z} = -4{,}72$ km, $\mu = 14 \cdot 10^{-3}$ kg $\Rightarrow \frac{\mu g}{R\delta_{T,z}} \approx -3{,}5$

$P(z) = P_0 T_0^{-3{,}5} (-4{,}72 \frac{K}{km} z + T_0)^{3{,}5}$

$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{(\gamma-1)\mu g z}{\gamma R T_0}\right)^{\gamma/\gamma-1}$

, $P(z) = 0$ für $T_0 = 4{,}72 \cdot z'$

$Z =$