Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

23.12.2016 Theoretische Physik IV 9. Hausübung — Marvin Zanke

$|z|<2\pi$ wofür?

H 12)
$$g(x,z) := \frac{z e^{xz}}{e^z-1} =: \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!}, \quad |z|<2\pi$$
$$B_n := B_n(0)$$

1. i)
$$g(1-x,z) = \frac{z e^{(1-x)z}}{e^z-1} = \frac{z e^z \cdot e^{-xz}}{e^z-1} = \frac{e^z}{e^z}\,\frac{z e^{-xz}}{1-e^{-z}}$$
$$= \frac{-z e^{-xz}}{e^{-z}-1} = g(x,-z)$$

Nun:
$$\frac{d^0}{dz^0} g(x,z)\Big|_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{0^n}{n!} \overset{0^0=1;\ 0^k=0,\ k\geq 1}{=} B_0(x)$$
$$\frac{d}{dz} g(x,z)\Big|_{z=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\Big|_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1}(x) \frac{z^n}{n!}\Big|_{z=0}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1}(x) \frac{0^n}{n!} = B_1(x)$$

$\vdots$

$$\frac{d^m}{dz^m} g(x,z)\Big|_{z=0} = \sum_{n=m}^{\infty} B_n(x) \frac{z^{n-m}}{(n-m)!}\Big|_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+m}(x) \frac{z^n}{n!}\Big|_{z=0}$$
$$= B_m(x)$$

$x \mapsto 1-x$

$$\rightsquigarrow B_m(1-x) = \frac{d^m}{dz^m} g(1-x,z)\Big|_{z=0} \overset{\text{erster Teil}}{=} \frac{d^m}{dz^m} g(x,-z)\Big|_{z=0}$$
$$= \underbrace{\left(\frac{d(-z)}{dz}\frac{d}{d(-z)}\right)\cdots\left(\frac{d(-z)}{dz}\frac{d}{d(-z)}\right)}_{m\text{-mal}} g(x,-z)\Big|_{z=0}$$
$$= (-1)^m \frac{d^m}{d(-z)^m} g(x,-z)\Big|_{z=0} = (-1)^m \frac{d^m}{dz^m} g(x,z)\Big|_{z=0}$$
$$= (-1)^m B_m(x), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$$

das ex. nicht

Ist $\frac{d^2}{dz^2} \overset{?}{=} \left(\frac{d}{dz}\right)^2$?

$(-1)^m \frac{d^m}{dz^m} g(x,z)\big|_{z=0}$

$(-1)^m \frac{d^m}{d(-z)^m} g(x,-z)\big|_{z=0}$

nur weil $|z=0$?

nein, gilt immer!

$z \to -z$ ist nur eine Umbenennung.

$$\frac{d^m}{dz^m} g(x,z)\Big|_{z=z_0} = \frac{d^m}{d(-z)^m} g(x,-z)\Big|_{z=-z_0}$$

ii) $$\frac{\partial}{\partial x} g(x,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z e^{xz}}{e^z - 1}\right) = \frac{z^2 e^{xz}}{e^z - 1} = z\, g(x,z) \quad (*)$$

$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}$ weil $\cancel{z(x)}$?

außerdem $$\frac{\partial}{\partial x} g(x,z) = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n'(x) \frac{z^n}{n!} \quad (**)$$

Wieso kann man das in die Summe ziehen?

weil die Summe „nett" konvergiert

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} g(x,z) = z g(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^{n+1}}{n!} \overset{\text{Shift}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(x) \frac{z^n}{(n-1)!}$$

$$\overset{\frac{n}{n}=1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n B_{n-1}(x) \frac{z^n}{n!} \underset{\substack{n=0 \\ \text{kein Beitrag}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n B_{n-1}(x) \frac{z^n}{n!}$$

$n \cdot B_{n-1}(x) \frac{z^n}{n!} \neq 0$ für $B_{n-1}(x) \frac{z^n}{n!} \to \infty$ bzw. was ist $\frac{1}{(-1)!}$?

Vgl. mit $(**)$ und unter Ausnutzung der Eindeutigkeit von Potenzreihenentwicklungen folgt:

$$B_n'(x) = \frac{d}{dx} B_n(x) = n B_{n-1}(x)$$

$$\leadsto B_0'(x) = 0 \cdot B_{-1}(x) = 0$$

iii) $$g(-x,-z) - g(x,z) = \frac{(-z)e^{xz}}{e^{-z}-1} - \frac{z e^{xz}}{e^z - 1} = \frac{(-z)e^{xz}(e^z - 1) - z e^{xz}(e^{-z}-1)}{2 - e^z - e^{-z}}$$

$$= \frac{z e^{xz}\{1 - e^z + 1 - e^{-z}\}}{2 - e^z - e^{-z}} = z e^{xz}$$

$$(-1)^n B_n(-x) - B_n(x) \overset{(i)}{=} (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} g(-x,z)\Big|_{z=0} - \frac{d^n}{dz^n} g(x,z)$$

$$= \frac{d^n}{dz^n} g(-x,-z)\Big|_{z=0} - \frac{d^n}{dz^n} g(x,z)$$

$$= \frac{d^n}{dz^n}\Big\{g(-x,-z) - g(x,z)\Big\}\Big|_{z=0} = \frac{d^n}{dz^n}\left(z e^{xz}\right)\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(e^{xz} + xz e^{xz}\right)\Big|_{z=0} = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(e^{xz}(1+zx)\right)\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}\left(x e^{xz}(1+zx) + x e^{xz}\right)\Big|_{z=0} = \frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}\left(x e^{xz}(zx+2)\right)\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{d^{n-3}}{dz^{n-3}}\left(x^2 e^{xz}(zx+2) + x^2 e^{xz}\right)\Big|_{z=0} = \frac{d^{n-3}}{dz^{n-3}}\left(x^2 e^{xz}(zx+3)\right)\Big|_{z=0}$$

$$\ldots = \left(x^{n-1} e^{xz}(zx+n)\right)\Big|_{z=0} = n x^{n-1}$$

Schönerer Weg ohne diese n-fache Ableitung?

vielleicht Induktion?

Integral grenzen 0 bis x? Oder unbestimmtes Integral?

0 bis x

2. Zuerst stellen wir fest $(n \neq 0)$ $\quad B_n(x_1) - B_n(x_0) = n \int_{x_0}^{x_1} dy\, B_{n-1}(y)$

$$B_n'(x) \overset{1.ii)}{=} n B_{n-1}(x) \iff B_n(x) = n \int_0^x B_{n-1}(x)\, dx$$

und

$$\int_0^1 B_n(x)\, dx \overset{1.ii)}{=} \int_0^1 \frac{1}{n+1} B_{n+1}'(x)\, dx = \frac{1}{n+1} \left\{ B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) \right\}$$

$$\overset{1.i)}{=} \frac{1}{n+1} \left\{ (-1)^{n+1} B_{n+1}(0) - B_{n+1}(0) \right\} \overset{1.iii)}{=} \begin{cases} 0 & , n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{n+1}\left((n+1) 0^n\right) & , n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$= 0$$

- Für $B_0 := B_0(x)|_{x=0}$ benutzen wir 1i): $B_0(x) = \frac{d^0}{dz^0} g(x,z)\Big|_{z=0} = \frac{z e^{xz}}{e^z - 1}\Big|_{z=0}$

$$\overset{\text{l'Hôpital}}{=} \frac{e^{xz} + z x e^{xz}}{e^z}\Big|_{z=0} = 1$$

Nun beginnt der Spaß:

- $B_1(x) = 1 \int B_0(x)\, dx = x + c$

$$\int_0^1 B_1(x) = 0 \iff \left[\frac{1}{2}x^2 + cx + c'\right]\Big|_0^1 = 0 \iff \frac{1}{2} + c = 0 \iff c = -\frac{1}{2}$$

$$\leadsto B_1(0) = -\frac{1}{2}$$

- $B_2(x) = 2 \int B_1(x)\, dx = 2 \int (x - \frac{1}{2})\, dx = x^2 - x + c$

$$\int_0^1 B_2(x) = 0 \iff \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + cx + c'\right]\Big|_0^1 = 0 \iff \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + c = 0$$

$$\iff c = \frac{1}{6}$$

$$\leadsto B_2(0) = \frac{1}{6}$$

- $B_{2n+1} = 0$ für $n \geq 1$, denn: $1iii) \rightarrow (-1)^{2n+1} \cdot B_{2n+1}(-x) - B_{2n+1}(x) = (2n+1) x^{2n}$

$$\overset{x=0}{\iff} -2 B_{2n+1}(0) = (2n+1)\, 0^{2n}$$

$$\iff B_{2n+1} = 0$$

- $B_3(x) = 3\int B_2(x)\,dx = 3\int (x^2 - x + 1/6)\,dx = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1/2\,x + C$

$$\int_0^1 B_3(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \left[1/4\,x^4 - 1/2\,x^3 + 1/4\,x^2 + Cx + C' \right]\Big|_0^1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1/4 - 1/2 + 1/4 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0 \quad ($$

$$(\rightsquigarrow B_3(0) = 0)$$

- $B_4(x) = 4\int B_3(x)\,dx = 4\int (x^3 - 3/2\,x^2 + 1/2\,x)\,dx = x^4 - 2x^3 + x^2 + C$

$$\int_0^1 B_4(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \left[1/5\,x^5 - 1/2\,x^4 + 1/3\,x^3 + Cx + C' \right]\Big|_0^1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1/5 - 1/2 + 1/3 + C = 0 \Leftrightarrow C = -1/30$$

$$\rightsquigarrow B_4(0) = -\frac{1}{30}$$

3. $$\int_0^1 dx\, f(x) \overset{B_0(x)=1}{=} \int_0^1 dx\, f(x) B_0(x) \overset{1.ii)}{=} \int_0^1 dx\, f(x) \frac{1}{1} B_1'(x)$$

$$\overset{P.I.}{=} \Big[B_1(x) f(x)\Big]\Big|_0^1 - \int_0^1 B_1(x) f'(x)\, dx$$

$$= B_1(1)f(1) - B_1(0)f(0) - \int_0^1 B_1(x) f'(x)\, dx$$

$$= (-1)B_1(0)\, f(1) - B_1(0)\, f(0) - \int_0^1 dx\, B_1(x)\, f'(x)$$

$$\overset{B_1(0)=-1/2}{=} \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \int_0^1 dx\, f'(x) B_1(x)$$

$\boxed{q=1}$

Ist $q=0$ oder $q=1$ der erste Schritt?

Wir beweisen:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(f(1)-f(0)\right) - \sum_{p=1}^{q} \frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)\right) + \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx\, f^{(2q)}(x) B_{2q}(x)$$

mittels vollständiger Induktion

<u>Induktionsanfang ($q=1$)</u>: $$\int_0^1 f(x)\,dx \overset{s.o.}{=} \frac{1}{2}\left(f(1)-f(0)\right) - \int_0^1 dx\, f'(x) B_1(x)$$

$$\overset{1.ii)}{=} \frac{1}{2}\left(f(1)-f(0)\right) - \int_0^1 dx\, f'(x) \frac{1}{2} B_2'(x)$$

$$\overset{P.I.}{=} \frac{1}{2}\left(f(1)-f(0)\right) - \frac{1}{2}\left\{\Big[B_2(x) f'(x)\Big]\Big|_0^1 - \int_0^1 dx\, B_2(x)\, f''(x)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(1)-f(0)\right) - \frac{1}{2}\left(B_2(1)f'(1) - B_2(0)f'(0)\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 dx\, B_2(x) f''(x)$$

$$\overset{1.iii)}{=} \frac{1}{2}\left(f(1)-f(0)\right) - \frac{B_2(0)}{2}\left(f'(1) - f'(0)\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 dx\, f''(x)\, B_2(x)$$

gilt offensichtlich? ja?

<u>Induktionsvoraussetzung</u>: wie oben!

<u>Induktionsschritt ($q \mapsto q+1$)</u>: Wir führen den Schritt von $n \mapsto n+1$ konstruktiv durch:

vielleicht konstruktiv, $q \mapsto q+1$ oder von $q+1$ auf q zurückführen?

$\boxed{q \to q+1}$

$$\int_0^1 dx\, f(x) \overset{IV}{=} \frac{1}{2}\left(f(1)-f(0)\right) - \sum_{p=1}^{q} \frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)\right) + \underbrace{\frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx\, f^{(2q)}(x) B_{2q}(x)}_{(*)} \qquad (1)$$

$$(*) \overset{1.ii)}{=} \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx\, f^{(2q)}(x) \frac{1}{2q+1} B_{2q+1}'(x) = \frac{1}{(2q+1)!}\left\{\Big[B_{2q+1}(x) f^{(2q)}(x)\Big]\Big|_0^1 - \int_0^1 dx\, B_{2q+1}(x)\, f^{(2q+1)}(x)\right\}$$

$$= \frac{1}{(2q+1)!}\left\{\left(B_{2q+1}(1) f^{(2q)}(1) - B_{2q+1}(0) f^{(2q)}(0)\right) - \int_0^1 dx\, B_{2q+1}(x)\, f^{(2q+1)}(x)\right\}$$

$$\overset{1.i)}{=} \frac{1}{(2q+1)!}\left(-B_{2q+1}\right)\left(f^{(2q)}(1) + f^{(2q)}(0)\right) - \frac{1}{(2q+1)!}\int_0^1 dx\, B_{2q+1}(x)\, f^{(2q+1)}(x)$$

$$\overset{1.ii)}{=} -\frac{B_{2q+1}}{(2q+1)!}\left(f^{(2q)}(1)+f^{(2q)}(0)\right) - \frac{1}{(2q+1)!}\int_0^1 dx\, f^{(2q+1)}(x)\,\frac{1}{(2q+2)}\,B'_{2q+2}(x)$$

$$\overset{\substack{B_{2q+1}=0 \\ \text{für } q\geq 1 \\ \text{und P.I.}}}{=} -\frac{1}{(2q+2)!}\left\{\left[B_{2q+2}(x)\,f^{(2q+1)}(x)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 B_{2q+2}(x)\,f^{(2q+2)}(x)\,dx\right\}$$

$$= -\frac{1}{(2q+2)!}\Big(\underbrace{B_{2q+2}(1)}_{B_{2q+2}(0)\text{ mit }1ii)}f^{(2q+1)}(1) - B_{2q+2}(0)\,f^{(2q+1)}(0)\Big) + \frac{1}{(2q+2)!}\int_0^1 dx\, B_{2q+2}(x)\,f^{(2q+2)}(x)$$

Setzt man dieses Ergebnis für (*) nun mit (1) zusammen, so erhält man:

$$\int_0^1 dx\, f(x) = \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \sum_{p=1}^{q}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(1)-f^{(2p-1)}(0)\right)$$

$$-\frac{B_{2q+2}}{(2q+2)!}\left(f^{(2q+1)}(1)-f^{(2q+1)}(0)\right) + \frac{1}{(2q+2)!}\int_0^1 dx\, B_{2q+2}(x)\,f^{(2q+2)}(x)$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(1)-f(0)\right) - \sum_{p=1}^{q+1}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(1)-f^{(2p-1)}(0)\right) + \frac{1}{(2q+2)!}\int_0^1 dx\, B_{2q+2}(x)\,f^{(2q+2)}(x)$$

Und damit ist der Induktionsschritt gezeigt! ☐

4. $$\int_0^1 dx\, f(x+m) \underset{\frac{dx'}{dx}=1}{\overset{x+m=:x'}{=}} \int_m^{1+m} dx'\, f(x') = \int_m^{m+1} dx\, f(x)$$

Beweis erneut durch vollständige Induktion über n:

Warum „Restterm"? Ist der Term klein?

Induktionsanfang ($n=1$): $f(0)+f(1)$:
$$= \frac{1}{2}\left(f(0)+f(1)\right) + \int_0^1 dx\, f(x) + \sum_{p=1}^{q} \frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)\right) - \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx \sum_{m=0}^{0} B_{2q}(x+m)\, f^{(2q)}(x+m)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 dx\, f(x) = \frac{1}{2}\left(f(0)+f(1)\right) - \sum_{p=1}^{q}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)\right) + \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx\, f^{(2q)}(x)\, B_{2q}(x)$$

gilt nach 3.).

Induktionsvoraussetzung:
$$\sum_{m=0}^{n} f(m) = \frac{1}{2}\left(f(0)+f(n)\right) + \int_0^n dx\, f(x) + \sum_{p=1}^{q}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(n) - f^{(2p-1)}(0)\right) - \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx \sum_{m=0}^{n-1} B_{2q}(x+m)\, f^{(2q)}(x+m)$$

Induktionsschritt ($n \mapsto n+1$):
$$\frac{1}{2}\left(f(0)+f(n+1)\right) + \int_0^{n+1} dx\, f(x) + \sum_{p=1}^{q}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(n+1) - f^{(2p-1)}(0)\right) - \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx \sum_{m=0}^{n} B_{2q}(x+m)\, f^{(2q)}(x+m)$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(0)+f(n)\right) + \frac{1}{2}\left(f(n+1)-f(n)\right) + \int_0^n f(x)\,dx + \int_n^{n+1} dx\, f(x)$$
$$+ \sum_{p=1}^{q}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(n) - f^{(2p-1)}(0)\right) + \sum_{p=1}^{q}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(n+1) - f^{(2p-1)}(n)\right)$$
$$- \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx \sum_{m=0}^{n-1} B_{2q}(x+m)\, f^{(2q)}(x+m) - \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx\left(B_{2q}(x+n)\, f^{(2q)}(x+n)\right)$$

I.V. der unterstr. Terme
$$= \sum_{m=0}^{n} f(m) + \frac{1}{2}\left(f(n+1)-f(n)\right) + \int_n^{n+1} dx\, f(x) + \sum_{p=1}^{q}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(n+1) - f^{(2p-1)}(n)\right) - \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx\left(B_{2q}(x+n)\, f^{(2q)}(x+n)\right)$$

3.) mit $\tilde{f}(x) := f(x+n)$ und $\int_n^{n+1} dx\, f(x) = \int_0^1 dx\, f(x+n)$
$$= \sum_{m=0}^{n} f(m) + \frac{1}{2}\left(f(n+1)-f(n)\right) + \left\{\frac{1}{2}\left(\tilde{f}(1)+\tilde{f}(0)\right) - \sum_{p=1}^{q}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(\tilde{f}^{(2p-1)}(1) - \tilde{f}^{(2p-1)}(0)\right) + \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx\, \tilde{f}^{(2q)}(x)\, B_{2q}(x)\right\}$$
$$+ \sum_{p=1}^{q}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(n+1) - f^{(2p-1)}(n)\right) - \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx\left(B_{2q}(x+n)\, f^{(2q)}(x+n)\right)$$

$$
\overset{(x)}{\underset{\text{einsetzen}}{=}} \sum_{m=0}^{n} f(m) + \frac{1}{2}\left(f(n+1) - f(n)\right) + \frac{1}{2}\left(f(n+1) + f(n)\right) - \sum_{p=1}^{q} \frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(n+1) - f^{(2p-1)}(n)\right)
$$

$$
+ \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx \left(f^{(2q)}(x+n)\, B_{2q}(x)\right) + \sum_{p=1}^{q} \frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(n+1) - f^{(2p-1)}(n)\right)
$$

$$
- \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx \left(B_{2q}(x+n)\, f^{(2q)}(x+n)\right)
$$

$$
= \sum_{m=0}^{n} f(m) + f(n+1) + \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx\, f^{(2q)}(x+n)\left[B_{2q}(x) - B_{2q}(x+n)\right]
$$

$$
= \sum_{m=0}^{n+1} f(m) + \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 dx\, f^{(2q)}(x+n)\left[B_{2q}(x) - B_{2q}(x+n)\right]
$$

Sicher dass in die Induktionsbehauptung im Restterm kein $B_{2q}(x)\, f^{(2q)}(x+m)$ gehört? Dann passt es auch...

?

Warum gehen wir über auf $\mathbb{C}$ und nicht $\mathbb{R}^2$?

Residuensatz ↳ $\mathbb{C}$

5\. Aus der 1.) erinnern wir uns daran, dass $B_n(x) = \frac{d^n}{dz^n} g(x,z)\Big|_{z=0}$

mit $g(x,z) = \frac{z e^{xz}}{e^z - 1}$ und damit:

$$B_n = B_n(0) = \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)\Big|_{z=0} \qquad (*)$$

Nach dem Residuensatz gilt bekanntlich,

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_k \in D} I(C, z_k)\, \mathrm{Res}(f, z_k) \quad \text{für geschlossene Kurven } C$$

und darin eingeschlossene Definitionslücken z_k (abzählbar).

Sind auf der „rechten" Seite beim Residuensatz nur Quellen/Def.-lücken der Summe?

ja, summiere über Polstellen

Falls $f(z)$ in z_k eine Polstelle der Ordnung n hat, so gilt für das Residuum in diesem Punkt:

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_k)^n f(z)\right]\Big|_{z=z_k}$$

Schaut man sich nun die Funktion $f(z) := \frac{z}{e^z-1} \frac{1}{z^{n+1}}$ an, so stellt man fest, dass diese in $z=0$ eine Polstelle der Ordnung $(n+1)$ hat, denn:

$$z^n f(z) = \frac{1}{e^z-1} \xrightarrow{z\to 0} \infty$$

$$z^{n+1} f(z) = \frac{z}{e^z-1} \xrightarrow[\text{l'hôspital}]{z \to 0} \frac{1}{e^z} \xrightarrow{z\to 0} 1$$

Warum $|z| < 2\pi$? $z = 2\pi$ ist doch erlaubt, nur nicht $z = 2\pi i$?

es soll heißen: $|z| < 2\pi$

da $|z| < 2\pi$ gibt es keine weiteren Polstellen in C_0.

Damit berechnen wir den gegebenen Ausdruck für B_n:

$$B_n = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_0} dz \frac{z}{e^z-1} \frac{1}{z^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i}\left(2\pi i \sum_{z_k \in D} I(C, z_k)\, \mathrm{Res}(f, z_k)\right)$$

$$= n!\, I(C, z_k)\, \mathrm{Res}(f, 0) \underset{\text{anti-clockwise}}{\overset{C=1}{=}} n!\, \mathrm{Res}(f, 0).$$

Darf man l'hôspital z.B. bei $\frac{1}{(e^z-1)z^n}$ anwenden wenn man um schreibt $\frac{\ }{(\ -1)} \to \frac{-n z^{-n+1}}{e^z}$?

Obiges Hilfsmittel zur Berechnung des Residuums liefert:

$$B_n = n! \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n}\left[(z-0)^{n+1} f(z)\right]\Big|_{z=0} = \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)\Big|_{z=0}$$

Vgl. mit $(*)$ zeigt die Äquivalenz.

6. $f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \rightsquigarrow f'(z) = \frac{(e^z-1) - ze^z}{(e^z-1)^2}$

$$\rightsquigarrow f''(z) = \frac{(e^z - e^z - ze^z)(e^z-1)^2 - 2(e^z-1)e^z(e^z-1-ze^z)}{(e^z-1)^4}$$

$$= \frac{(-ze^z)(e^z-1) - 2e^z(e^z-1-ze^z)}{(e^z-1)^3}$$

Außerdem:

$$f(z)\big|_{z=0} = \frac{z}{e^z-1}\Big|_{z=0} \overset{\text{l'Hôspital}}{=} \frac{1}{e^z}\Big|_{z=0} = 1$$

$$f'(z)\big|_{z=0} = \frac{e^z-1-ze^z}{(e^z-1)^2}\Big|_{z=0} \overset{\text{l'Hôspital}}{=} \frac{e^z - e^z - ze^z}{2e^z(e^z-1)}\Big|_{z=0} \overset{\text{l'Hôspital}}{=} \frac{-ze^z - e^z}{2[e^z(e^z-1)+e^ze^z]}\Big|_{z=0}$$

$$= -\tfrac{1}{2}$$

$$f''(z)\big|_{z=0} = \frac{(-ze^z)(e^z-1) - 2e^z(e^z-1-ze^z)}{(e^z-1)^3}\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{-ze^{2z} + ze^z - 2e^{2z} + 2e^z + 2ze^{2z}}{(e^z-1)^3}\Big|_{z=0} = \frac{ze^{2z} + ze^z - 2e^{2z} + 2e^z}{(e^z-1)^3}\Big|_{z=0}$$

$$\overset{\text{l'Hôspital}}{=} \frac{e^{2z} + 2ze^{2z} + e^z + ze^z - 4e^{2z} + 2e^z}{3e^z(e^z-1)^2}\Big|_{z=0} = \frac{-3e^{2z} + 3e^z + 2ze^{2z} + ze^z}{3e^z(e^z-1)^2}\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{-3e^z + 3 + 2ze^z + z}{3(e^z-1)^2}\Big|_{z=0} \overset{\text{l'Hôspital}}{=} \frac{-3e^z + 2e^z + 2ze^z + 1}{6e^z(e^z-1)}\Big|_{z=0}$$

$$\overset{\text{l'Hôspital}}{=} \frac{-3e^z + 2e^z + 2e^z + 2ze^z}{6e^z(e^z-1) + 6e^ze^z}\Big|_{z=0} = 1/6$$

Warum bis $O(z^3)$ entwickeln? $O(z^2)$ reicht – siehe nächste Seite…

$$\rightsquigarrow Tf(z,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n = f(0) + f'(0)z + \tfrac{1}{2} f''(0) z^2 + O(z^3)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{12} z^2 + O(z^3)$$

$$\rightsquigarrow B_n = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_0} dz \, \frac{1}{z^{n+1}} \left(1 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{12} z^2 + O(z^3)\right)$$

Warum kann man $z/e^z - 1$ gebraucht entwickeln von $\frac{1}{z^{n+1}}$?

$$B_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz \, \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{12} z^2 + O(z^3)\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} z + O(z^2)\right)$$

Nun parametrisieren wir: $\gamma(t) = re^{2\pi i t} \rightsquigarrow \dot{\gamma}(t) = 2\pi i \gamma(t)$

$$t \in [0, 1)$$

Dann gilt ganz allgemein: $\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\dot{\gamma}(t)\|_2 \, dt$

und damit für unser Integral weiter:

$$B_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 dt \left(\frac{1}{re^{2\pi i t}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} re^{2\pi i t} + O((re^{2\pi i t})^2)\right) 2\pi i \, re^{2\pi i t}$$

$$= \int_0^1 dt \left(1 - \frac{1}{2} re^{2\pi i t} + \frac{1}{12} (re^{2\pi i t})^2 + O((re^{2\pi i t})^3)\right)$$

$$= 1, \text{ denn } \int_0^1 dt \left(re^{2\pi i t}\right)^k = r^k \int_0^1 dt \, e^{2\pi i t \cdot k} = r^k \left[\frac{1}{2\pi i k} e^{2\pi i k t}\right]\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2\pi i k} r^k \left(e^{2\pi i k} - e^0\right) \underset{\substack{\uparrow \\ k \in \mathbb{Z}}}{=} \frac{r^k}{2\pi i k} \left((e^{2\pi i})^k - 1\right)$$

$$= 0$$

Gibt es eine nicht mathematische Erklärung (vllt. „anschaulich") dass die Fkt. integriert über den Kreis in $\mathbb{C}$ null ergeben sollte?

$$B_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz \, \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{12} z^2 + O(z^3)\right) = \int_0^1 dt \left(\frac{1}{(re^{2\pi i t})^2} - \frac{1}{2re^{2\pi i t}} + \frac{1}{12} + O(re^{2\pi i t})\right) \times re^{2\pi i t}$$

$$= \int_0^1 dt \left(\frac{1}{re^{2\pi i t}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} re^{2\pi i t} + O((re^{2\pi i t})^2)\right) = -\frac{1}{2}, \text{ da das } k \in \mathbb{Z}$$

und damit auch negativ sein kann?

7. $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} dz \, \frac{z}{e^z-1}\,\frac{1}{z^{n+1}} = \lim\limits_{R\to\infty} \Big\{ \oint_{\gamma_R} dz \, \frac{z}{e^z-1}\,\frac{1}{z^{n+1}} + \oint_{\gamma_0} dz \, \frac{z}{e^z-1}\,\frac{1}{z^{n+1}}$

$\qquad + \oint_{\gamma_{x+}} dz \, \frac{z}{e^z-1}\,\frac{1}{z^{n+1}} + \int_{\gamma_{x-}} dz \, \frac{z}{e^z-1}\,\frac{1}{z^{n+1}} \Big\}$

Ist $\gamma_0 = C_0$? Bei γ_0 ist doch der Kreis aufgeschnitten und bei C_0 geschlossen?

wobei wir C_R: „gesamt geschlossene Kurve“ aufgeteilt haben in

γ_R: „großer Kreis mit Radius R“

γ_{x+}: „Geradenstücke entlang positiver reeller Achse, $\operatorname{Im} z > 0$“

γ_{x-}: „ ———— , $\operatorname{Im} z < 0$“

γ_0: „kleine Kurve um den Nullpunkt“

und wir den limes $\operatorname{Im} z \to 0$ für die beiden Geradenstücke betrachten.

Damit diese sich aufheben muss doch eigentlich $\operatorname{Im} z \neq 0$, sonst besitzen die Integranden doch „umgekehrtes Vorzeichen“?

Die beiden Geradenstücke entlang der x-Achse heben sich genau auf, da sie in entgegen gesetzter Richtung durchlaufen werden und die Werte dadurch genau umgekehrtes Vorzeichen besitzen.

Betrachten wir nun:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} dz \, \frac{z}{e^z-1}\,\frac{1}{z^{n+1}} \overset{\text{Parametrisierung analog zu 6.}}{=} \lim_{R\to\infty} \int_0^1 dt \, \frac{Re^{2\pi i t}}{e^{Re^{2\pi i t}}-1}\,\frac{1}{(Re^{2\pi i t})^{n+1}} \cdot Re^{2\pi i t}(2\pi i)$$

$$= 2\pi i \lim_{R\to\infty} \int_0^1 dt \, \frac{1}{e^{Re^{2\pi i t}}-1}\,\frac{1}{(Re^{2\pi i t})^{n-1}}$$

$$\rightsquigarrow \left| \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} dz \, \frac{z}{e^z-1}\,\frac{1}{z^{n+1}} \right| \le 2\pi \lim_{R\to\infty} (2\pi R) \frac{1}{R^{n-1}} \max_{\substack{t\in[0,1] \\ t\neq 1/4,\, 3/4}} \left| \frac{1}{e^{Re^{2\pi i t}}-1} \right|$$

Maximal angenommener Wert über die gesamte Kurve integriert und Wert rausgenommen an dem $e^{2\pi i t}$ imaginär, da die Funktion dort nicht gegen Null konvergiert (abzählbar und damit kein Beitrag zum Integral)

$$= 4\pi^2 \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n-2}} \max_{\substack{t\in[0,1] \\ t\neq 1/4,\, 3/4}} \left| \frac{1}{e^{Re^{2\pi i t}}-1} \right|$$

$= 0$ für $n \geq 2$

Muss nicht $n \geq 3$? Das Problem ist doch, dass man nicht weiß, dass $\left|\frac{1}{e^{Re^{2\pi i t}}-1}\right| \to 0$ überall oder?

$$\Longrightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} dz \, \frac{z}{e^z-1}\,\frac{1}{z^{n+1}} = \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_0} dz \, \frac{z}{e^z-1}\,\frac{1}{z^{n+1}} = \lim_{R\to\infty} \int_{C_0} dz \, \frac{z}{e^z-1}\,\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \oint_{C_0} dz \, \frac{z}{e^z-1} \frac{1}{z^{n+1}} = \lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} dz \, \frac{z}{e^z-1} \frac{1}{z^{n+1}}$$

Residuen-satz $\searrow$
$$= 2\pi i \sum_{z_k \in D} I(c, z_k) \operatorname{Res}(f, z_k)$$

$z_k \in D$: Def.-lücken

$\uparrow (-1)$ für „beide" Def. lücken bei $\pm 2\pi i p$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ da math. negativ umlaufen (im Uhrzeigersinn)

„beide": p-mal 2 Stück

$$= -2\pi i \sum_{p=1}^{\infty} \left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{e^z-1} \frac{1}{z^n}; 2\pi i p\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{e^z-1}\frac{1}{z^n}; -2\pi i p\right]\right)$$

Wir bemerken dass $f(z) := \frac{1}{e^z-1} \frac{1}{z^n}$ eine einfache Polstelle in $z = \pm 2\pi i p$ hat,

denn: $\lim_{z \to \pm 2\pi i p} \frac{1}{e^z-1} \frac{1}{z^n} \longrightarrow \infty$, aber

$$\lim_{z \to \pm 2\pi i p} \frac{(z \mp 2\pi i p)}{(e^z-1) z^n} \xrightarrow{\text{l'Hôspital}} \lim_{z \to \pm 2\pi i p} \frac{1}{e^z z^n + n z^{n-1}(e^z - 1)} = \frac{1}{(\pm 2\pi i p)^n}$$

$$= \frac{(\pm 1)^n}{(2\pi i p)^n}$$

und damit gilt auch für das Residuum, dass

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{e^z-1} \frac{1}{z^n}; \pm 2\pi i p\right] = \frac{(\pm 1)^n}{(2\pi i p)^n}$$

, denn dieses ist bei einer einfachen Polstelle gegeben durch:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{e^z-1}\frac{1}{z^n}; \pm 2\pi i p\right] = \frac{1}{1} \frac{d^0}{dz^0}\left[(z \mp 2\pi i p)^1 \frac{1}{e^z-1} \frac{1}{z^n}\right]\Bigg|_{z = \pm 2\pi i p}$$

wie bereits in 5. benutzt.

8. Nach 7. gilt also:

$$B_{2k+1} \overset{5.}{=} \frac{(2k+1)!}{2\pi i} \oint_{C_0} dz \, \frac{z}{e^z-1} \frac{1}{z^{(2k+1)+1}}$$

$$\overset{7.}{=} \frac{(2k+1)!}{2\pi i} \left(-2\pi i \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{(+1)^{2k+1}}{(2\pi i p)^{2k+1}} + \frac{(-1)^{2k+1}}{(2\pi i p)^{2k+1}} \right) \right)$$

$$= -(2k+1)! \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\pi i p)^{2k+1}} - \frac{1}{(2\pi i p)^{2k+1}} \right) = 0$$

$$B_{2k} = \frac{(2k)!}{2\pi i} \left(-2\pi i \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{(+1)^{2k}}{(2\pi i p)^{2k}} + \frac{(-1)^{2k}}{(2\pi i p)^{2k}} \right) \right)$$

$$= -(2k)! \sum_{p=1}^{\infty} 2 \frac{1}{(2\pi i p)^{2k}} = -2 \, (2k)! \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2\pi p)^{2k}}$$

$$= -2 \frac{(-1)^k (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2k}} = -2 \frac{(-1)^k (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k)$$

mit $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

9. $$\int_0^{\infty} dx \, x^{s-1} e^{-\alpha x} \underset{\frac{dt}{dx}=\alpha}{\overset{t=\alpha x}{=}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{s-1} e^{-t} = \frac{1}{\alpha^s} \int_0^{\infty} dt \, t^{s-1} e^{-t}$$

$$\underset{\text{per Def.}}{=} \frac{1}{\alpha^s} \Gamma(s)$$

Nun: $$\Gamma(s)\zeta(s) = \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} \overset{\text{Tipp}}{\underset{\text{s.o.}}{=}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \, x^{s-1} e^{-nx}$$

Integral und Summe vertauschen?

$$= \int_0^{\infty} dx \, x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}} \underset{\substack{n=0 \\ \text{Term abziehen}}}{=} \int_0^{\infty} dx \, x^{s-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}} - 1 \right)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $|x|<1$ und $e^{-nx} < 1$ da $x > 0$ auf unserem Intervall und $n = 1, 2, \ldots$

$$= \int_0^{\infty} dx \, x^{s-1} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - 1 \right) = \int_0^{\infty} dx \, x^{s-1} \left(\frac{1-(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} \right)$$

$$= \int_0^{\infty} dx \, x^{s-1} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \int_0^{\infty} dx \, x^{s-1} \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\Leftrightarrow \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dx \, x^{s-1} \frac{1}{e^x-1} \quad \blacksquare$$

10. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^s} \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s} - 2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(2l)^s} \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s} - \frac{2}{2^s}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^s} = (1-2^{1-s})\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$$

k gerade: negativ
k ungerade: positiv
⇝ die Gerade 2x abziehen

ausklammern

umbenennen

Nun: $$\Gamma(s)\zeta(s)(1-2^{1-s}) = (1-2^{1-s})\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(s)}{k^s} \underset{\substack{\text{Tipp,}\\ \text{1.c.}}}{=} \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^s}\right)\Gamma(s)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\Gamma(s)}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\int_0^{\infty}dx\, x^{s-1}e^{-kx} = \int_0^{\infty}dx\, x^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}e^{-kx}$$

$$= -\int_0^{\infty}dx\, x^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-e^{-x})^k = -\int_0^{\infty}dx\, x^{s-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-e^{-x})^k - 1\right)$$

$$= -\int_0^{\infty}dx\, x^{s-1}\left(\frac{1}{1+e^{-x}} - 1\right) = -\int_0^{\infty}dx\, x^{s-1}\left(\frac{1-1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)$$

$$= \int_0^{\infty}dx\,\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,x^{s-1} = \int_0^{\infty}dx\, x^{s-1}\frac{1}{e^x+1}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}dx\, x^{s-1}\frac{1}{e^x+1} = (1-2^{1-s})\zeta(s) \qquad \blacksquare$$

11. Wir betrachten nun:

$$\frac{(2^{2k-1}-1)(-1)^{k+1}\pi^{2k}B_{2k}}{2k} \overset{8.}{=} \frac{(2^{2k-1}-1)(-1)^{k+1}\pi^{2k}}{2k}\left(-2\frac{(-1)^k(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k)\right)$$

$$= \frac{(2^{2k-1}-1)}{2k}(-1)^{2k+1}(-2)\frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\pi^{2k}\zeta(2k) = \frac{(2^{2k-1}-1)}{k}\frac{(2k)!}{2^{2k}}\zeta(2k)$$

$$\overset{10.}{=} \frac{(2^{2k-1}-1)}{k}\frac{(2k)!}{2^{2k}}\frac{1}{\Gamma(2k)}\frac{1}{1-2^{1-2k}}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{2k-1}}{e^x+1}$$

$\Gamma(n+1)=n!$

$$\underset{\Gamma(2k)=(2k-1)!}{=} \frac{(2^{2k-1}-1)}{(2^{2k}-2)}\frac{(2k)!}{(2k-1)!}\frac{1}{k}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{2k-1}}{e^x+1} = \frac{2k}{2k}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{2k-1}}{e^x+1} = \int_0^\infty dx\,\frac{x^{2k-1}}{e^x+1} \qquad \blacksquare$$

Außerdem:

$$(-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{4k} = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}}{4k}\left(-2\frac{(-1)^k(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k)\right)$$

$$= \frac{2}{4k}(2k)!\,\zeta(2k) \overset{9.}{=} \frac{1}{2k}(2k)!\frac{1}{\Gamma(2k)}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{2k-1}}{e^x-1}$$

$$= \frac{2k}{2k}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{2k-1}}{e^x-1} = \int_0^\infty dx\,\frac{x^{2k-1}}{e^x-1} \qquad \blacksquare$$

Nun berechnen wir:

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x}{e^x+1} \overset{k=1}{=} \frac{(2^1-1)(-1)^2\pi^2B_2}{2} \overset{2.}{=} \frac{1}{2}\pi^2\frac{1}{6} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^3}{e^x+1} \overset{k=2}{=} \frac{(2^{4-1}-1)(-1)^3\pi^4B_4}{4} \overset{2.}{=} \frac{7(-1)\pi^4}{4}\left(-\tfrac{1}{30}\right) = \frac{7\pi^4}{120}$$

Und wie soll man jetzt Integrale mit geraden Exponenten ausrechnen, wie am Anfang des Zettels versprochen? KEIN

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x}{e^x-1} \overset{k=1}{=} \frac{(-1)^2(2\pi)^2B_2}{4} \overset{2.}{=} \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^3}{e^x-1} \overset{k=2}{=} \frac{(-1)^3(2\pi)^4B_4}{8} = \frac{-16\pi^4}{8}B_4 \overset{2.}{=} -2\pi^4\left(-\tfrac{1}{30}\right) = \frac{\pi^4}{15}$$