Eine Antwort auf. . .

eine der wirklich wichtigen Fragen im Leben

Marvin Zanke

`www.Physics-And-Stuff.com`

1. September 2019

Einleitung

Wir schreiben den 01.09.2019 als Jan „Juan Franginho" Hünerbein während des Saison-Abschlussgrillens im Melbbad gegen 21:30 Uhr auf mich zukommt um mir von einem mathematischen Problem zu berichten. Entstanden zu sein scheint die hitzige Diskussion im Laufe eines Spieleabends, welcher sich unmittelbar vor dem Abschlussgrillen zugetragen haben muss. Zur Debatte stand die Frage, welches der beiden folgenden Szenarien ein „lukrativeres" Glücksspiel für den Spieler ist: Das Würfeln mit ...

- ... einem Würfel und dem Addieren von +3 auf das Ergebnis
- ... drei Würfeln und dem Addieren von +1 auf die höchste geworfene Augenzahl

und mathematisch ausgedrückt also dem Vergleich von $\mathbb{E}(X_1+3)$ und $\mathbb{E}(X_3+1)$, wobei $X_i = \{\text{Höchste Augenzahl aus dem gleichzeitigen Wurf von } i \text{ Würfeln}\}$. Schlaflos wälzte ich mich nach dem Grillen im Bett und entschloss mich letztendlich dazu, das Problem noch vor der nächtlichen Ruhe anzugehen. Die dabei entstandenen Notizen sollen hier sauber dargelegt werden. Dabei verzichten wir zugunsten von Verständlichkeit zunächst auf mathematische Rigorosität und gehen das Problem in einem weiteren Kapitel allgemeiner an.

1 Die Herangehensweise

Während der Erwartungswert $\mathbb{E}(X_1 + 3) = 6,5$ aus

$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{j=1}^{6} x_j P(X_1 = x_j), \quad x_j : \text{Augenzahl}, \quad P(X_1 = x_j) : \text{W.keit für die Augenzahl}$$

folgt und allgemein bekannt sein sollte (die Wahrscheinlichkeit ist für alle Augenzahlen gleich, nämlich $\frac{1}{6}$), erfordert $\mathbb{E}(X_3)$ etwas mehr Arbeit. Wir überlegen uns dazu erst einmal, wie wir die eigentliche Fragestellung so formulieren können, dass wir sie mathematisch besser greifen können. Eigentlich sind wir nämlich daran interessiert, die Chance zu finden, dass bei den drei Würfeln die größte Augenzahl eine $m \in \mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ist, sodass wir dann wie oben

$$\mathbb{E}(X_3) = \sum_{j=1}^{6} x_j P(X_3 = x_j) \tag{1.1}$$

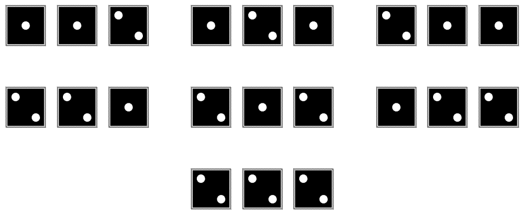
berechnen können. Für eine Wahrscheinlichkeit gilt ganz allgemein dass $P = \frac{E}{M}$ wobei E: erwünschte Ereignisse und M: mögliche Ereignisse. Für das Beispiel des einen Würfels hat man also $P(X_1 = x_j) = \frac{1}{6}$ für die Wahrscheinlichkeit dass eine beliebige aber bestimmte Zahl x_j geworfen wird (z.B. eine 2). Für die drei Würfel wird diese Überlegung etwas komplizierter, aber sobald wir diesen Schritt erledigt haben, können wir den Erwartungswert ganz einfach wie oben ausrechnen. Die möglichen Ereignisse sind im Folgenden immer $M = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, da jeder Würfel die Augenzahlen von 1 bis 6 zeigen kann und jede dieser Kombinationen möglich ist.

Fangen wir damit an, dass die größte Zahl unter den drei Würfeln eine 1 ist. Es gibt nur ein erwünschtes Ereignis, nämlich dass alle drei Würfel eine 1 zeigen, also

da die 1 sonst nicht mehr die größte Zahl wäre. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist demnach

$$P(X_3 = 1) = \frac{1}{216}.$$

Die Möglichkeiten dass die größte Zahl eine 2 ist sind ebenfalls schnell ausgeschöpft, nämlich



das heißt E=7 erwünschte Ereignisse. Ganz allgemein lässt sich folgende Überlegung machen: Wir wollen die Ereignisse, in denen die höchste Zahl eine 2 ist, das heißt Würfel „1“ darf eine 1 oder 2 zeigen, genau so wie Würfel „2“ und Würfel „3“ und einzig und alleine das Ereignis in denen alle Würfel eine 1 zeigen soll nicht als erwünschtes Ereignis betrachtet werden. Das macht dann $E_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 7$. Wir finden für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$P(X_3 = 2) = \frac{7}{216}.$$

Die Möglichkeiten in denen die größte Zahl eine 3 ist, lassen sich ähnlich berechnen. Diesmal müssen wir jedoch mehr Ereignisse aus „Würfel ‚1‘ darf eine 1, 2 oder 3 zeigen, genau so wie Würfel ‚2‘ und Würfel ‚3‘ “ wieder abziehen. Nämlich die Ereignisse, in denen keiner der Würfel eine 3 anzeigt. Glücklicherweise sind das genau die Ereignisse von vorher, nämlich „Würfel ‚1‘ darf eine 1 oder 2 zeigen, genau so wie Würfel ‚2‘ und Würfel ‚3‘ “. Wir finden für die erwünschten Ereignisse also $E_3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 19$ und demnach

$$P(X_3 = 3) = \frac{19}{216}.$$

Für die anderen Fälle finden wir ganz analog, dass $E_4 = 37$, $E_5 = 61$, $E_6 = 91$ und demnach

$$P(X_3 = 4) = \frac{37}{216},$$
$$P(X_3 = 5) = \frac{61}{216},$$
$$P(X_3 = 6) = \frac{91}{216}.$$

Der Erwartungswert berechnet sich dann zu

$$\mathbb{E}(X_3 + 1) = 4,958333333 + 1 = 5,958333333.$$

2 Allgemeine Formel

Um das Resultat in eine schöne Formel zu packen und es einfacher zu machen auf mehr Würfel zu erweitern, schreiben wir hier

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{6^i} \sum_{j=1}^{6} j(j^i - (j-1)^i)$$

mit i der Anzahl der Würfel. Wer übereifrig ist, mag hier sicherlich noch Summenformeln zum vereinfachen benutzen, siehe hierzu beispielsweise [2]. Insbesondere ergibt sich für den Spezialfall $i = 3$ aus der Formel wieder der oben angegebene Erwartungswert.

Literaturverzeichnis

[1] Nützliche Diskussion mit Jan „Juan Franginho“ Hünerbein im Melbbad, 01.09.2019

[2] https://www.arndt-bruenner.de/mathe/Allgemein/summenformel2.htm